離散戸田格子の超離散化と箱玉系*

前田一貴†
京都大学大学院情報学研究科 D2

キーワード：（超）離散可積分系，箱玉系，直交多項式

1　はじめに

本稿の目標は，有限格子上の離散戸田格子（以下，単に有限離散戸田格子と書く）についての理解を深めることである．具体的には，次の 2 つの話題を扱う：

(i) 有限離散戸田格子と有限次で打ち切られた直交多項式の関係を調べ，この関係を利用して実際に初期値問題の解を構成する．

(ii) 有限離散戸田格子に対して，超離散化と呼ばれる極限操作を適用し，得られた系（有限超離散戸田格子）が箱玉系と関係づけられることを見る．

まず本節で有限離散戸田格子について簡単に説明し，2 節で (i)，3 節で (ii) の話題を扱う．

離散戸田格子 (discrete Toda lattice) [1] とは，次の漸化式で記述される離散力学系である：

$$q_n^{(t+1)} + e_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} + e_{n+1}^{(t)}, \quad q_{n-1}^{(t+1)} e_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} e_n^{(t)}. \tag{1.1}$$

ここで，$n \in \mathbb{Z}$ は空間変数，$t \in \mathbb{Z}$ は時間変数で，$q_n^{(t)}, e_n^{(t)} \in \mathbb{R}$ が従属変数である．離散戸田格子は，典型的な可積分系である（連続時間の）戸田格子 [13] の離散類似として広田 [3] によって導出され，特に (1.1) の形に変数変換した場合については [5] で議論されている．

離散戸田格子について特筆すべきこととして，両無限格子境界条件の場合にいわゆる N-ソリトン解を持つなど,「可積分な」離散化となっていることが挙げられる．これは戸田格子を離散化して得られる系が持つ自明な性質というわけではない．例えばロジスティック方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t)\,(1 - x(t)) \tag{1.2}$$

の微分を前進差分に置き換えて得られるロジスティック写像

$$\frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} = x(t)\,(1 - x(t)) \tag{1.3}$$

は，差分間隔 δ を大きくすれば元のロジスティック方程式 (1.2) にはないカオスの挙動を現わすことがよく知られている [8]．一方，(1.3) とは右辺が 1 箇所だけ異なる

$$\frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta} = x(t)\,(1 - x(t+\delta)) \tag{1.4}$$

ではそのようなことは起こらない [9]．(1.4) は (1.2) を線型化してから微分を後退差分に置き換えることで得られる系であり，線型化可能であることの帰結として，元の微分方程式と類似

*於：第 4 回白浜研究集会 (2012.12.3–6)

†E-mail: kmaeda@amp.i.kyoto-u.ac.jp

[1] 時間変数を離散化した戸田格子なので「離散時間戸田格子 (discrete-time Toda lattice)」とした方が適切だが，特に誤解のおそれはないので単に離散戸田格子と書く．

のベキを用いて書ける解を持つ．同様に，離散戸田格子 (1.1) は元の戸田格子を「双線型化」してから離散化することにより導出されており，数多ある戸田格子の離散化の中でも離散類似と呼ぶにふさわしいものであると言うことができる．

本稿では，特に境界条件として格子が有限で打ち切られている場合，つまり N をある正整数として，任意の $t \in \mathbb{Z}$ について $e_0^{(t)} = e_N^{(t)} = 0$ を課す場合を考える．この場合は，本稿でも述べる箱玉系との関係以外にも，特異値計算アルゴリズムである dqds 法 [2] と密接な関係があり，応用上重要である．dqds 法については本稿では紙数の都合上述べることができないが，こうした離散可積分系の工学への応用についても興味を持っていただければ幸いである．

2 有限離散戸田格子と直交多項式

有限離散戸田格子は，N 次二重対角行列

$$L^{(t)} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ e_1^{(t)} & 1 & & & \\ & e_2^{(t)} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{N-1}^{(t)} & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{(t)} := \begin{pmatrix} q_0^{(t)} & 1 & & & \\ & q_1^{(t)} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & q_{N-1}^{(t)} \end{pmatrix}$$

を用いて（上式で書かれていない成分は 0），

$$L^{(t+1)}R^{(t+1)} = R^{(t)}L^{(t)}$$

と書くことができる．ここで，$B^{(t)} := L^{(t)}R^{(t)}$ と置けば，$B^{(t)}$ は Jacobi 行列（三重対角行列）である：

$$B^{(t)} = \begin{pmatrix} u_0^{(t)} & 1 & & & \\ v_1^{(t)} & u_1^{(t)} & 1 & & \\ & v_2^{(t)} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & v_{N-1}^{(t)} & u_{N-1}^{(t)} \end{pmatrix}, \quad u_n^{(t)} = q_n^{(t)} + e_n^{(t)}, \quad v_n^{(t)} = q_{n-1}^{(t)} e_n^{(t)}.$$

副対角成分 $v_n^{(t)}$ が非零であると仮定すると，$B^{(t)}$ を通して有限離散戸田格子と直交多項式が自然に関係づけられる．$B^{(t)}$ の n 次主座小行列を $B_n^{(t)}$，n 次単位行列を I_n と書き，x の多項式 $\phi_n^{(t)}(x)$ を

$$\phi_0^{(t)}(x) := 1, \quad \phi_n^{(t)}(x) := \det(xB_n^{(t)} - I_n), \quad n = 1, 2, \ldots, N,$$

と定める．このとき，行列式の一番下の行での展開を考えることで，

$$\phi_{n+1}^{(t)}(x) = \begin{vmatrix} x - u_0^{(t)} & -1 & & & \\ -v_1^{(t)} & x - u_1^{(t)} & -1 & & \\ & -v_2^{(t)} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -v_n^{(t)} & x - u_n^{(t)} \end{vmatrix} = (x - u_n^{(t)})\phi_n^{(t)}(x) - v_n^{(t)}\phi_{n-1}^{(t)}(x),$$

$$n = 0, 1, \ldots, N - 1,$$

なる三項間漸化式が得られる．ただし，$\phi_{-1}^{(t)}(x)=0$ とする．これより，$\phi_n^{(t)}(x)$ はモニック（最高次係数が 1）な n 次多項式であり，さらに次の直交関係式を満たす線型汎関数 $\mathcal{L}^{(t)}:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}$ が存在することが言える [1, CHAPTER I, Theorem 4.4 (Favard's Theorem)]：

$$\mathcal{L}^{(t)}[\phi_m^{(t)}(x)\phi_n^{(t)}(x)]=h_n^{(t)}\delta_{m,n},\quad h_n^{(t)}\neq 0,\quad m,n=0,1,\ldots,N-1,\quad \delta_{m,n}\text{: Kronecker delta,}$$

$$\forall\pi(x)\in\mathbb{R}[x],\quad \mathcal{L}^{(t)}[\pi(x)\phi_N^{(t)}(x)]=0.$$

この意味で，$\{\phi_n^{(t)}(x)\}_{n=0}^{N}$ を**直交多項式** (orthogonal polynomials) という．ここで，直交関係式は，$\{\phi_0^{(t)}(x),\phi_1^{(t)}(x),\ldots,\phi_n^{(t)}(x)\}$ が n 次以下の多項式全体のなす線型空間を張ることに注意すると，次と同値であることがわかる：

$$\mathcal{L}^{(t)}[x^m\phi_n^{(t)}(x)]=h_n^{(t)}\delta_{m,n},\qquad n=0,1,\ldots,N-1,\quad m=0,1,\ldots,n, \tag{2.1a}$$

$$\mathcal{L}^{(t)}[x^m\phi_N^{(t)}(x)]=0,\qquad m=0,1,2,\ldots. \tag{2.1b}$$

直交多項式 $\{\phi_n^{(t)}(x)\}_{n=0}^{N}$ が与えられているとき，新たな（次の時刻の）多項式列 $\{\phi_n^{(t+1)}(x)\}_{n=0}^{N}$ を

$$\phi_n^{(t+1)}(x):=\frac{\phi_{n+1}^{(t)}(x)+q_n^{(t)}\phi_n^{(t)}(x)}{x},\quad q_n^{(t)}:=-\frac{\phi_{n+1}^{(t)}(0)}{\phi_n^{(t)}(0)},\quad n=0,1,\ldots,N-1, \tag{2.2}$$

$$\phi_N^{(t+1)}(x):=\phi_N^{(t)}(x)$$

で定める．すると，$\phi_n^{(t+1)}(x)$ は再びモニックな n 次多項式であり，さらに線型汎関数 $\mathcal{L}^{(t+1)}$ を $\mathcal{L}^{(t+1)}[f(x)]:=\mathcal{L}^{(t)}[xf(x)]$ で定めれば，時刻 $t+1$ でも直交関係式 (2.1) が満たされることがわかる．変換 (2.2) を **Christoffel 変換** (Christoffel transformation) という [11]．また，直交多項式は三項間漸化式を満たさなければならないことから，逆変換

$$\phi_n^{(t)}(x)=\phi_n^{(t+1)}(x)+e_n^{(t)}\phi_{n-1}^{(t+1)}(x),\quad n=0,1,\ldots,N, \tag{2.3}$$

を満たすことが要請される．(2.2) を (2.3) に代入すると

$$x\phi_n^{(t)}(x)=\phi_{n+1}^{(t)}(x)+\left(q_n^{(t)}+e_n^{(t)}\right)\phi_n^{(t)}(x)+q_{n-1}^{(t)}e_n^{(t)}\phi_{n-1}^{(t)}(x)$$

が，(2.3) を (2.2) に代入すると

$$x\phi_n^{(t+1)}(x)=\phi_{n+1}^{(t+1)}(x)+\left(q_n^{(t)}+e_{n+1}^{(t)}\right)\phi_n^{(t+1)}(x)+q_n^{(t)}e_n^{(t)}\phi_{n-1}^{(t+1)}(x)$$

がそれぞれ得られるから，この 2 つの式が無矛盾であるためには $e_n^{(t)}$ は離散戸田格子 (1.1) を満たす変数でなければならない．このようにして有限離散戸田格子と直交多項式は関係づけられる．

以上の関係を用いると，有限離散戸田格子の初期値問題の解を次のようにして構成することができる．線型汎関数の m 次モーメントを

$$\mu_m^{(t)}:=\mathcal{L}^{(t)}[x^m]$$

と定義すると，線型性より線型汎関数 $\mathcal{L}^{(t)}$ を定めることは任意の非負整数 m に対するモーメント $\mu_m^{(t)}$ を全て定めることと同値である．そこで，初期時刻 $t=0$ のモーメントを

$$\mathcal{L}^{(0)}[\phi_0^{(0)}(x)]=\mathcal{L}^{(0)}[1]=h_0^{(0)}\neq 0,$$

$$\mathcal{L}^{(0)}[\phi_n^{(0)}(x)] = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$\mathcal{L}^{(0)}[x^m \phi_N^{(0)}(x)] = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

を満たすように定め，時間発展は $\mathcal{L}^{(t+1)}[f(x)] = \mathcal{L}^{(t)}[xf(x)]$ より

$$\mu_n^{(t+1)} = \mu_{n+1}^{(t)}$$

で定めれば，直交関係式 (2.1) を満たすことが示される．特に，簡単のために $\phi_N^{(0)}(x)$ の零点が全て単純であると仮定すると[2]，モーメントは次の表示式を持つ：

$$\mu_n^{(t)} = \sum_{j=0}^{N-1} c_j x_j^{n+t}. \tag{2.4}$$

ここで，$x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ は $\phi_N^{(0)}(x)$ の相異なる零点，$c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ は次の Vandermonde 行列を係数行列とする連立一次方程式を満たす定数である：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^{N-1} & x_1^{N-1} & \cdots & x_{N-1}^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0^{(0)} \\ \mu_1^{(0)} \\ \vdots \\ \mu_{N-1}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

モーメントを用いると，モニック直交多項式 $\phi_n^{(t)}(x)$ は次のように行列式で表すことができる：

$$\phi_n^{(t)}(x) = \frac{1}{\tau_n^{(t)}} \begin{vmatrix} \mu_0^{(t)} & \mu_1^{(t)} & \cdots & \mu_{n-1}^{(t)} & \mu_n^{(t)} \\ \mu_1^{(t)} & \mu_2^{(t)} & \cdots & \mu_n^{(t)} & \mu_{n+1}^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1}^{(t)} & \mu_n^{(t)} & \cdots & \mu_{2n-2}^{(t)} & \mu_{2n-1}^{(t)} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$$

ここで，$\tau_n^{(t)}$ は時刻 t のモーメントを要素とする n 次の Hankel 行列式である：

$$\tau_n^{(t)} := |\mu_{i+j}^{(t)}|_{0 \le i,j \le n-1} = \begin{vmatrix} \mu_0^{(t)} & \mu_1^{(t)} & \cdots & \mu_{n-1}^{(t)} \\ \mu_1^{(t)} & \mu_2^{(t)} & \cdots & \mu_n^{(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n-1}^{(t)} & \mu_n^{(t)} & \cdots & \mu_{2n-2}^{(t)} \end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

したがって，有限離散戸田格子の解は，スペクトル変換 (2.2), (2.3) より

$$q_n^{(t)} = -\frac{\phi_{n+1}^{(t)}(0)}{\phi_n^{(t)}(0)} = \frac{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}}{\tau_{n+1}^{(t)}\tau_n^{(t+1)}}, \quad e_n^{(t)} = \frac{\mathcal{L}^{(t)}[x^n\phi_n^{(t)}(x)]}{\mathcal{L}^{(t+1)}[x^{n-1}\phi_{n-1}^{(t+1)}(x)]} = \frac{\tau_{n+1}^{(t)}\tau_{n-1}^{(t+1)}}{\tau_n^{(t)}\tau_n^{(t+1)}} \tag{2.6}$$

で与えられることがわかる．なお，(2.5) に (2.4) を代入し，Cauchy-Binet の公式を用いて展開すると

$$\tau_n^{(t)} = \sum_{0 \le r_0 < r_1 < \cdots < r_{n-1} \le N-1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} c_{r_i} x_{r_i}^t \prod_{0 \le k < l \le n-1} (x_{r_l} - x_{r_k})^2 \right) \tag{2.7}$$

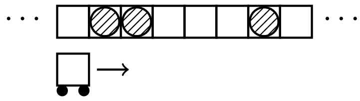
という表示が得られる．

[2]重複がある場合についても解を与えることは可能である．

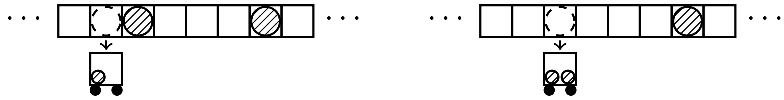
3　有限超離散戸田格子と箱玉系

箱玉系 (box–ball system) [12] とは，一列に並んだ無限個の箱のうちの有限個に玉が入っており，これらの玉を次のルールに従って動かすことによって時間発展していく力学系（セル・オートマトン）である：

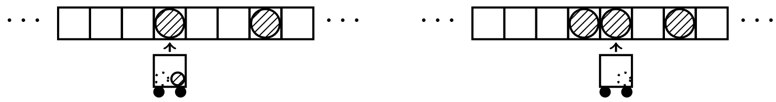
- 玉の運搬車が左から右へと移動し，各箱の前で次の動作を行う．



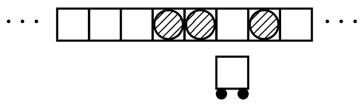
  – もし箱に玉が入っていれば，それを取り出して運搬車に積む．



  – もし箱に玉が入っておらず，かつ運搬車に玉が積まれていれば，その箱に玉を 1 つ入れる．



  – もし箱に玉が入っておらず，かつ運搬車に玉が積まれていなければ何もしない．



なお，各箱には最大でも 1 つしか玉を入れることができず，また運搬車はいくらでも玉を積むことができるとする．全ての玉を 1 度ずつ動かした時点でそれを時間発展の 1 ステップであると定義すると，例えば次のように時間発展する：

```
t=0:   .11111.....1111...11.............................
  1:   ......11111....111..111..........................
  2:   ...........1111...11...11111.....................
  3:   ...............111..111....11111.................
  4:   ..................11...1111......11111...........
  5:   ....................11.....1111.......11111......
  6:   ......................11.......1111........11111.
```

図 1: 箱玉系の時間発展の例．1 で玉の入った箱を，. で空き箱を表す．

図 1 を観察してわかるのは，まるで玉のかたまりがソリトンのように振る舞っているということである．ソリトンとは粒子性を持つ孤立波のことで，一定の形状・速度で伝搬し，ソリトン同士が衝突したあとも壊れず，衝突の前後で位相のずれが生じるなどの性質が知られているが，確かに図 1 においても玉のかたまりが同様の性質を持っていることが確認できる．このような簡単な例だけからでも窺うことができるように，箱玉系は豊富な数理構造を持つことが知られている [14]．

箱玉系がソリトン系のように振る舞う理由は，現在では以下のように**超離散化** (ultradiscretization) と呼ばれる極限操作を含む変換を通じて理解されるようになっている [15]．超離散化において鍵となるのは次の関係式である：

$$\lim_{\epsilon\to+0} -\epsilon\log\left(\mathrm{e}^{-A/\epsilon}+\mathrm{e}^{-B/\epsilon}\right)=\min(A,B),$$
$$\lim_{\epsilon\to+0} -\epsilon\log\left(\mathrm{e}^{-A/\epsilon}\times\mathrm{e}^{-B/\epsilon}\right)=A+B.$$

ただし，$A,B\in\mathbb{R}$．これを利用して，演算 $(+,\times,\div)$ を $(\min,+,-)$ へと置き換え，実数体上の方程式から min-plus 代数と呼ばれる半環上の方程式への変換を行う．例えば,

$$a=\frac{(b+c)d}{f}$$

という式があれば，$\epsilon>0$ として $a=\mathrm{e}^{-A/\epsilon}, b=\mathrm{e}^{-B/\epsilon}, c=\mathrm{e}^{-C/\epsilon}, d=\mathrm{e}^{-D/\epsilon}, f=\mathrm{e}^{-F/\epsilon}$ と変数変換を行い，両辺の $-\epsilon\log$ を取れば

$$A=-\epsilon\log\left(\mathrm{e}^{-B/\epsilon}+\mathrm{e}^{-C/\epsilon}\right)+D-F$$

となる．ここで $\epsilon\to+0$ の極限をとれば,

$$A=\min(B,C)+D-F$$

を得る．注意しなければならないのは，変換元の方程式に減算が入っている場合である．なぜならば，$\lim_{\epsilon\to+0} -\epsilon\log\left(\mathrm{e}^{-A/\epsilon}-\mathrm{e}^{-B/\epsilon}\right)$ は $A<B$ ならば A になるが，$A\geq B$ のときは値が不定になってしまうからである．これは，min-plus 代数が半環であること，つまり min-plus 代数の加法にあたる min 演算では，単位元 $+\infty$ 以外の元に対する逆元が存在しないことと対応している．

実際に超離散化の例を見てみよう．次の離散 KdV 方程式と呼ばれる方程式を考える [4]：

$$u_n^{(t+1)}-u_{n-1}^{(t)}=\delta\left(\frac{1}{u_n^{(t)}}-\frac{1}{u_{n-1}^{(t+1)}}\right). \tag{3.1}$$

離散 KdV 方程式はソリトンを記述する典型的な方程式として知られる KdV 方程式の時間変数・空間変数を離散化して得られる方程式であり，N ソリトン解を持つことが知られている．(3.1) を

$$u_n^{(t+1)}+\frac{\delta}{u_{n-1}^{(t+1)}}=u_{n-1}^{(t)}+\frac{\delta}{u_n^{(t)}}$$

と書き換えて，$u_n^{(t)}=\mathrm{e}^{-U_n^{(t)}/\epsilon}, \delta=\mathrm{e}^{-1/\epsilon}$ と変数変換した後，$\epsilon\to+0$ の極限を取れば,

$$\min(U_n^{(t+1)},1-U_{n-1}^{(t+1)})=\min(U_{n-1}^{(t)},1-U_n^{(t)})$$

という関係式が得られる．しかし，この式は時間発展を計算するためには役に立たない．そこで，時間発展が計算できる式を得るために

$$u_n^{(t+1)}=u_{n-1}^{(t)}+\delta\left(\frac{1}{u_n^{(t)}}-\frac{1}{u_{n-1}^{(t+1)}}\right)$$

と書き換えて超離散化することを考えるが，このままでは右辺に減算が含まれているために超離散化ができない．この問題の解決策として，次の方法が知られている．境界条件として $n\ll 0$ で $u_n^{(t)}=1$ を課すとき，関係式

$$u_n^{(t+1)}-\frac{\delta}{u_n^{(t)}}=u_{n-1}^{(t)}-\frac{\delta}{u_{n-1}^{(t+1)}}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
u_n^{(t+1)} &= \frac{\delta}{u_n^{(t)}} + u_{n-1}^{(t)} - \frac{\delta}{u_{n-1}^{(t+1)}} \\
&= \frac{\delta}{u_n^{(t)}} + \frac{u_{n-1}^{(t)}}{u_{n-1}^{(t+1)}}\left(u_{n-1}^{(t+1)} - \frac{\delta}{u_{n-1}^{(t)}}\right) \\
&= \frac{\delta}{u_n^{(t)}} + \frac{u_{n-1}^{(t)}}{u_{n-1}^{(t+1)}}\left(u_{n-2}^{(t)} - \frac{\delta}{u_{n-2}^{(t+1)}}\right) \\
&= \frac{\delta}{u_n^{(t)}} + \frac{u_{n-1}^{(t)}}{u_{n-1}^{(t+1)}}\frac{u_{n-2}^{(t)}}{u_{n-2}^{(t+1)}}\left(u_{n-2}^{(t+1)} - \frac{\delta}{u_{n-2}^{(t)}}\right) \\
&= \dots
\end{aligned}$$

より

$$u_n^{(t+1)} = \frac{\delta}{u_n^{(t)}} + \prod_{j=-\infty}^{n-1} \frac{u_j^{(t)}}{u_j^{(t+1)}}$$

が得られる．これに対して超離散化を適用すれば

$$U_n^{(t+1)} = \min\left(1 - U_n^{(t)}, \sum_{j=-\infty}^{n-1}\left(U_j^{(t)} - U_j^{(t+1)}\right)\right) \tag{3.2}$$

となる．ただし，境界条件は $n \ll 0$ で $U_n^{(t)} = 0$．方程式から，もし初期値 $U_n^{(0)}$ が整数で与えられれば，任意の時刻 t での $U_n^{(t)}$ の値が整数になることがわかる．つまり，従属変数の値も離散化されたとみなすことができ，これが「超離散化」という名前の由来となっている．

特に方程式 (3.2) の場合は，初期値 $U_n^{(0)}$ を $\{0, 1\}$ の 2 値に制限すれば，任意の時刻で $U_n^{(t)} \in \{0, 1\}$ となる．実は，$U_n^{(t)} \in \{0, 1\}$ を時刻 t の n 番目の箱に入っている玉の数とすれば（ただし箱の番号は左から $\dots, 0, 1, 2, \dots$ と付けられているとする），(3.2) は箱玉系の時間発展方程式そのものとなっている．このように，離散 KdV 方程式 (3.1) を超離散化して箱玉系の時間発展方程式 (3.2) が得られることが，箱玉系の玉のかたまりがソリトンのように振る舞う理由となっている．

離散戸田格子 (1.1) に対しても超離散化を適用してみよう．関係式

$$q_n^{(t+1)} - e_{n+1}^{(t)} = q_n^{(t)} - e_n^{(t+1)}, \quad e_n^{(t+1)} = e_n^{(t)} \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}}$$

を利用すれば，境界条件 $e_0^{(t)} = 0$ の条件の下で

$$\begin{aligned}
q_n^{(t+1)} &= e_{n+1}^{(t)} + q_n^{(t)} - e_n^{(t+1)} \\
&= e_{n+1}^{(t)} + q_n^{(t)} - e_n^{(t)} \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}} \\
&= e_{n+1}^{(t)} + \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}}\left(q_{n-1}^{(t+1)} - e_n^{(t)}\right) \\
&= e_{n+1}^{(t)} + \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}}\left(q_{n-1}^{(t)} - e_{n-1}^{(t+1)}\right) \\
&= e_{n+1}^{(t)} + \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}}\left(q_{n-1}^{(t)} - e_{n-1}^{(t)} \frac{q_{n-1}^{(t)}}{q_{n-2}^{(t+1)}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e_{n+1}^{(t)} + \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}} \frac{q_{n-1}^{(t)}}{q_{n-2}^{(t+1)}} \left(q_{n-2}^{(t+1)} - e_{n-1}^{(t)} \right) \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

より

$$
q_n^{(t+1)} = e_{n+1}^{(t)} + \frac{\prod_{j=0}^{n} q_j^{(t)}}{\prod_{j=0}^{n-1} q_j^{(t+1)}}, \quad e_n^{(t+1)} = e_n^{(t)} \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}}
$$

を得る．$q_n^{(t)} = \mathrm{e}^{-Q_n^{(t)}/\epsilon}$, $e_n^{(t)} = \mathrm{e}^{-E_n^{(t)}/\epsilon}$ と変数変換して，$\epsilon \to +0$ の極限を取れば

$$
Q_n^{(t+1)} = \min\left(E_{n+1}^{(t)}, \sum_{j=0}^{n} Q_j^{(t)} - \sum_{j=0}^{n-1} Q_j^{(t+1)} \right), \quad E_n^{(t+1)} = E_n^{(t)} + Q_n^{(t)} - Q_{n-1}^{(t+1)} \tag{3.3}
$$

となる．有限格子の境界条件 $E_0^{(t)} = E_N^{(t)} = +\infty$ を考えると，(3.3) は次のように見ることで箱玉系と対応することがわかる [10]：

- $Q_n^{(t)}$: 時刻 t における，n 番目の玉のかたまりの大きさ.
- $E_n^{(t)}$: 時刻 t における，$n-1$ 番目と n 番目の玉のかたまりの間の距離.

図 2 が例である.

$\overbrace{}^{Q_0^{(0)}}\ \overbrace{}^{E_1^{(0)}}\ \overbrace{}^{Q_1^{(0)}}\ \overbrace{}^{E_2^{(0)}}\ \overbrace{}^{Q_2^{(0)}}$ $\qquad$ $Q_0^{(t)} E_1^{(t)} Q_1^{(t)} E_2^{(t)} Q_2^{(t)}$

```
t=0:   .11111.....1111...11.............................   5 5 4 3 2
  1:   ......11111....111..111..........................   5 4 3 2 3
  2:   ...........1111...11...11111.....................   4 3 2 3 5
  3:   ...............111..111.....11111................   3 2 3 5 5
  4:   ..................11...1111......11111...........   2 3 4 6 5
  5:   ....................11.....1111.......11111......   2 5 4 7 5
  6:   ......................11.......1111........11111.   2 7 4 8 5
```

図 2: 箱玉系と有限超離散戸田格子の対応関係.

このように，箱玉系を記述する方程式には超離散 KdV 方程式 (3.2) と有限超離散戸田格子 (3.3) の 2 つがある．これは流体力学の運動方程式において，ある固定された微小体積の空間中を通過していく流体粒子の運動を記述する Euler 形式と，時間とともに動いていく流体粒子そのものの運動を記述する Lagrange 形式の 2 つがあることと対応している.

超離散系の解は，超離散化する前の離散系の解を超離散化すれば与えることができる．前節で有限離散戸田格子に対して解を (2.6), (2.7) で与えたが，これは超離散化することが可能で，$C_0, C_1, \dots, C_{N-1}, X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ を定数として

$$
\begin{gathered}
Q_n^{(t)} = T_n^{(t)} - T_{n+1}^{(t)} - T_n^{(t+1)} + T_{n+1}^{(t+1)}, \quad E_n^{(t)} = T_{n+1}^{(t)} - T_n^{(t)} - T_n^{(t+1)} + T_{n-1}^{(t+1)}, \\
T_n^{(t)} = \min_{0 \le r_0 < r_1 < \cdots < r_{n-1} \le N-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (C_{r_i} + tX_{r_i}) + \sum_{0 \le k < l \le n-1} 2\min(X_{r_l}, X_{r_k}) \right)
\end{gathered}
$$

が有限超離散戸田格子 (3.3) の解となる.

これまで箱玉系の研究においては超離散 KdV 方程式とその拡張系を用いて論じられることが多く，そうした議論で得られた箱玉系の種々の拡張系が，有限超離散戸田格子のどのような拡張系と対応しているのかについて論じられることはあまりなかった．最近の研究により，運搬車に容量制限を入れる拡張や，箱の容量を 1 より大きくする拡張について，有限超離散戸田格子のどのような拡張系と対応するのかがわかった．興味を持たれた方は参考文献 [6,7] を参照していただきたい.

謝辞

本研究は科研費（特別研究員奨励費 23・4105）の助成を受けたものである.

参考文献

[1] T. S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, New York—London—Paris, 1978.

[2] K. V. Fernando and B. N. Parlett, *Accurate singular values and differential qd algorithms*, Numer. Math. **67** (1994), 191–229.

[3] R. Hirota, *Nonlinear partial difference equations. II. Discrete-time Toda equation*, J. Phys. Soc. Japan **43** (1977), 2074–2078.

[4] R. Hirota, *New solutions to the ultradiscrete soliton equations*, Stud. Appl. Math. **122** (2009), 361–376.

[5] 広田良吾, 辻本諭, 今井達也, *Difference scheme of soliton equations*, 数理解析研究所講究録 **822** (1993), 144–152.

[6] K. Maeda, *A finite Toda representation of the box-ball system with box capacity*, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012), 085204.

[7] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice*, JSIAM Lett. **2** (2010), 95–98.

[8] R. M. May, *Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos*, Science **186** (1974), 645–647.

[9] M. Morisita, *The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density*, Res. Popul. Ecol. **7** (1965), 52–55.

[10] A. Nagai, D. Takahashi and T. Tokihiro, *Soliton cellular automaton, Toda molecule equation and sorting algorithm*, Phys. Lett. A **255** (1999), 265–271.

[11] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials*, Methods Appl. Anal. **2** (1995), 369–398.

[12] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Japan **59** (1990), 3514–3519.

[13] M. Toda, *Vibration of a chain with nonlinear interaction*, J. Phys. Soc. Japan **22** (1967), 431–436.

[14] 時弘哲治, 箱玉系の数理, 朝倉書店, 2010.

[15] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 3247–3250.