線形計画法

前田一貴
福知山公立大学情報学部

最終更新日：2023-08-13 15:16:39+09:00

はじめに

線形計画法は，数理最適化問題と呼ばれる問題群の中でも最も基本的である線形計画問題の解法の理論のことを指す．このテキストは，筆者が所属する福知山公立大学で線形計画法の講義をするにあたって執筆したものである．この科目は全学共通科目であり，情報系の学生と経営系の学生が受講するため，学生のもつ前提知識が多様であることを考慮し，必要となる数学の説明も含めた自己完結的なテキストを作ることを試みた．理論の説明部分の数式だけを見ていると難しそうに感じるだろうが，実際にやっていることはそこまで複雑ではないと分かることを目指していただきたい．

このテキストの構成は以下の通りである．まずはじめに数理計画法とは何かを簡単に説明し，最終的にどんな問題が解ければよいのか，目標を提示する．その後，3 回をかけて線形計画法の学習に必要な線形代数学の事項を，扱うトピックは必要最小限に絞りつつも，読めば理論的にある程度深いところまで理解できるように詳細に記述した．この部分は講義で全てを説明するには分量が多すぎるので，講義では線形計画法を運用するのに必要な計算法の事項を中心に説明し，その後各自でテキストを読んで理論的な事項を補うことを想定している．準備を終えたら，本論である線形計画法のシンプレックス法と双対理論について一通り説明する．最後に内点法の概要と整数計画問題への応用についても触れた．

数学のテキストはどうしても無味乾燥なものになりがちであるが，動機付けのために本文の進め方が読者にとって自然なものとなるように工夫した（理論的には目新しいことはない）ほか，通常の出版されるテキストでは削られてしまうような，講義をしていてつい脱線しがちな余談を文中に埋め込むことを試みた．余談は当初は本文中にその

まま書いていたが，あまりにも量が多く本文を断絶させてしまうため脚注に移し，その後脚注でも邪魔に感じられたため最終的には後注に移した．相互にリンクを貼ってあるので，対応している PDF ビューワならば読んでいる途中で余談に飛んで，また本文に戻って続きを読むということができるようになっている．余談だけをまとめて読んでも楽しめるだろう．本文同様，余談もそれなりに調査をして書いたつもりだが（そのせいで無駄に執筆時間がかかっているが，個人的にも得るものが多かった），もし筆者の勘違いによる誤りがあればぜひ教えていただきたい．なお，この相互リンクの実現には LaTeX の enotez パッケージを利用した．ついでに謝辞も兼ねて書いておくと，文書クラスは jlreq クラス，定理等の囲みは tcolorbox パッケージ，図を描くには tikz パッケージと pgfplots パッケージを利用した．

テキストの執筆は概ね講義の進行に合わせて 2022 年の 4 月から 7 月にかけて行い，2023 年の同時期に再度講義をするのに合わせて誤記の修正と，これまでの講義や課題・試験の実施経験を踏まえた記述の追加・改善を行った．講義に間に合うように慌てて執筆した回もあったためか，後に数値のひどいミスが見つかることもあり，受講生には大変ご迷惑をおかけしたが，辛抱強く講義を聴いていただいたことに感謝を申し上げる次第である．

2023 年 8 月

前田一貴

目次

第 1 回　導入：数理計画法とは何か

初回は，説明に最低限必要となる数学の概念・記法の準備の後，線形計画法より広く「数理計画法」とは何かについて概要を説明し，動機付けとする．

1.1　最低限の数学の概念・記法の準備

≫ **集合論**　現代数学では**集合** (set) を用いて話をする．集合とは数学的な対象を集めたものである．例えば

$$S = \{ 1, 2, 7 \}$$

と書くと，S は 1, 2, 7 という 3 つの数字からなる集合であるということになる．このとき，1, 2, 7 は集合 S の**要素**もしくは**元** (element) であるという[余談1.1]．

集合の要素は有限個とは限らず，無限個の要素からなる場合もある．例えば

$$\{ 1, 3, 5, 7, 9, \dots \} \tag{1.1}$$

は正の奇数を全て集めた集合である．ここで「…」という記号を用いたが，意味はその直後の説明から明らかではあるものの，定義の式のみを見たときに曖昧さが残るのが気になる．もしかしたら 9 の次に 2 桁になると突然法則が変わって $10, 12, 14, \dots$ と続くかもしれない．この曖昧さを排除するために，同じ集合を

$$\{ 2n + 1 : n \text{ は 0 以上の整数} \} \tag{1.2}$$

と表すこともできる．式 (1.1) のように集合の要素を列挙して定義することを**外延的定義** (extensional definition)，式 (1.2) のように集合

の要素が満たす性質を与えて定義することを**内包的定義** (intensional defitnition) という[余談1.2].

よく現れる集合には慣習として使う文字が決められている．この授業では次の二つがよく現れる：

- $\mathbf{Z}$：**整数** (integer) を全て集めた集合 $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbf{R}$：**実数** (real number) を全て集めた集合（外延的に書くのは難しい）

Z, R ではなく，$\mathbf{Z}, \mathbf{R}$ と太字（ボールド）で表していることに注意[余談1.3].

a が集合 S の要素であるということを記号で $a \in S$ と表す．b が集合 S の要素でないということは $b \notin S$ と表す．例えば，

$$2 \in \mathbf{Z}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}, \quad \pi \in \mathbf{R}. \tag{1.3}$$

ある集合の要素であるかないかを用いて，対象がどのような性質を持つかを表すことができる．例えば，式 (1.3) は左から「2 は整数である，$\frac{1}{2}$ は整数ではない，円周率 π は実数である」と読める．同様に，例えば座標平面を考えて

$$L = \{ (x, y) : y = x \}$$

という点の集合を定義したとすると，$p \in L$ と書けば「p は $y = x$ を満たす点である（直線 $y = x$ 上の点である）」という意味になる．このような集合の記法による表現が現代数学ではよく用いられるので，慣れてほしい．

≫ **変数と下付き添字**　高校数学では，関数がとる変数は x が一つあるだけであった．現代数学では変数の数は 2 個，3 個と複数になり，さらに 10 個，100 個，1 億個などなど，いくらでも増えていく．そこ

で，n 個の変数があるときは $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ といった具合で下付き添字をつけることで変数を区別することが多い．高校で下付き添字というと数列を思い浮かべるかもしれないが，関係ないので注意．

≫ **不等号**　「x は 2 以下である」ということを高校までの数学では $x \leqq 2$ と表したが，今の世界では $x \leq 2$ と表すのが多数派なので，このテキストでも一本線の不等号を用いる．同様に「x は 3 以上である」は $x \geq 3$ となる．

1.2　制約つき最適化問題

最適化 (optimization) とは，なんらかの基準のもとで最適であると考えられる状況を実現することである．人間は日常の活動の中で最適化を無意識のうちに模索している．スーパーマーケットに行くときは，欲しい商品がなるべく安く買える（最適な）店を選び，なるべく短い（最適な）経路を通って向かう．若者がコストパフォーマンスの高いことばかりしようとするのは最適化的思考に他ならない．情報学で人工知能・機械学習技術の目標は正解率をなるべく上げることであり，経営学では組織の種々の利益をなるべく大きくする方法を考える．

ここまで書いた例を見直すと，最適化は**何かを最小化する，最大化する**と言い換えられることに気付くだろう．最小値や最大値を求める問題は高校までにもあった．

例題 1.1

関数 $y = -x^2 + 6x - 5$ が最大値をとる x と，最大値を求めよ．

解答　$y = -(x-3)^2 + 4$ と平方完成できるので，y のグラフは頂点の x 座標が 3 の上に凸な放物線となる．したがって，$x = 3$ で最大値 4 を

とることがわかる．■

ここで考えた最大値とは，$x \in \mathbf{R}$ がどんな値でもとれるとしたときに y がとれる最も大きな値のことである．ところが，**現実の問題ではどんな値でもとれるとは限らない**．例えば，生活費を浮かすために食費を減らすことを考えよう．食費を最小にする明らかな方法は何も食べないことである．しかし，これでは数日で病院に運び込まれてしまうだろう．そんな危ない生活は**実行可能** (feasible) でない．健康に生きるためには「毎日必要な栄養をとる」という**制約** (constraint) を満たしながら食費を減らすにはどうすればよいかを考えなければならない．これに対応して，数学的にも制約条件をつけた問題が考えられる．

例題 1.2

関数 $y = -x^2 + 6x - 5$ について，**x のとりうる値を $0 \leq x \leq 5$ の範囲に制限したとき**，最小値をとる x と，最小値を求めよ．

解答　$y = -(x - 3)^2 + 4$ と平方完成できるので，y のグラフは頂点の x 座標が 3 の上に凸な放物線となる．したがって，y は $x < 3$ では単調増加，$x > 3$ では単調減少であって，最小値をとる可能性があるのは制約条件の範囲の両端，すなわち $x = 0$ か 5 であることがわかる．$x = 0$ で $y = -5$, $x = 5$ で $y = 0$ であるから，$x = 0$ で最小値 -5 をとることがわかる．

書いていることの意味がわからないという者は復習のため自分でグラフを描いて考えること．自力ではどうにもならない者は教員に質問しなければならない．■

このように，制約条件がついた最小・最大化問題を特に**制約つき最適化問題** (constrained optimization problem) ということがある．ただし，この先出てくる問題は全て制約つきなので，わざわざ「制約つき」という言葉はつけない．

この節の最後に細かな用語の説明をしておく．単に最適化問題というと，数学的なものとは限られない場合があるので，数学的な問題であることを強調する際には**数理最適化問題** (mathematical optimization problem)，もしくは**数理計画問題** (mathematical programming problem) ということがある．数理最適化問題の解法の理論を**数理計画法** (mathematical programming) という．英語で programming と聞くとコンピュータのプログラミングを連想するかもしれないが，ここでのプログラムは会の進行予定表やテレビの番組表の方で，予定・計画を立てる問題であることを意味している[余談1.4]．実際になにか計画を立てる際に数理最適化問題がよく現れることは，このあとの例を見ればわかるだろう．

数理計画法をはじめとした数学的理論を駆使して，様々な問題に対して効率的な解決策を導く学問分野を**オペレーションズ・リサーチ** (operations research) という．

1.3　数理最適化問題の例

数理最適化問題の中でも制約条件でとれる値が整数値などのとびとびの点に限定された問題を**離散最適化問題** (discrete optimization problem) という．これに対比して範囲内の実数値を連続的にとれる問題は**連続最適化問題** (continuous optimization problem) という．この節では連続最適化問題が現実に現れる例を見てみよう．

≫ **線形計画問題**　連続最適化問題の中で最も簡単でかつ重要なのが線形計画問題である．ここではどんな問題なのかを見るのみで，解き方については第 5 回以降で学ぶことになる．

例題 1.3（生産計画問題）

ある工場ではしろくまのぬいぐるみとあざらしのぬいぐるみを作っている．

- しろくまのぬいぐるみが 1 個売れると 2000 円の利益，あざらしのぬいぐるみが 1 個売れると 750 円の利益が出る．
- しろくまのぬいぐるみを 1 個作るには生地が 200 g，綿が 900 g 必要．
- あざらしのぬいぐるみを 1 個作るには生地が 100 g，綿が 300 g 必要．
- 今，工場に生地が 10000 g，綿が 40000 g ある．

作ったぬいぐるみは全て売れるとすると，利益を最大にするためにはしろくまのぬいぐるみとあざらしのぬいぐるみをそれぞれ何個ずつ作ればよいか求めたい．この問題を数学的に表せ．

解答　「何個ずつ作ればよいか」と聞かれているので，個数が未知数であると考えて，しろくまのぬいぐるみを x_1 個，あざらしのぬいぐるみを x_2 個作るとする．このとき，利益は $2000x_1 + 750x_2$ 円になるので，これを最大にすればよい．ただし，生地と綿の量が限られているので，この量を超えてぬいぐるみを作ることはできない．生地の量の制約から $200x_1 + 100x_2 \leq 10000$，綿の量の制約から $900x_1 + 300x_2 \leq 40000$ である．最後に，個数は負の数にはならないか

ら，$x_1, x_2 \geq 0$ である（この条件を**非負制約** (nonnegative constraint) という）.

以上をまとめて書くと

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad && 2000x_1 + 750x_2 \\
&\text{条件} && 200x_1 + 100x_2 \leq 10000 \\
& && 900x_1 + 300x_2 \leq 40000 \\
& && x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる[余談1.5]. ■

数理計画法では，最小化・最大化したい関数のことを**目的関数** (objective function) という．また，変数のことを特に**決定変数** (decision variable) とよぶことがある．以降，このテキストでは最適化問題はいつもこの形式で書き表し，列記した条件を全て満たす解を探さなければならないものと約束する．

この例題で出てきた問題の特徴は，目的関数と制約条件が全て決定変数 x_1, x_2 の一次式で表されていることである．このような最適化問題を**線形計画問題** (linear programming problem) という．

注意　本当はぬいぐるみの個数は整数なので，$x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$ という制約条件をつけなければならないが，この条件を加えると離散最適化問題になり，一気に難しくなる場合がある．詳しくは第 15 回で扱う．

線形 (linear) というのは「直線的」という意味で，例えばリニアモーターカーも直線的に動くモーターを用いるからこの名がある．数学の文脈では「一次」という言葉で置き換えることができる．昔は「線型」

と書いたようだが，より簡単に「線形」と書くようになって久しい．

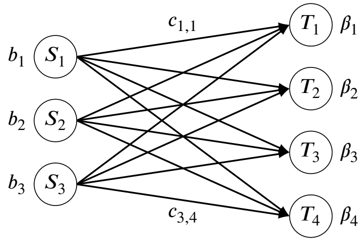
生産計画問題をはじめとする線形計画問題は基本情報技術者試験の午前によく出題される．この授業で今後学ぶような本格的な解法が必要となる問題はまず出ないが，「最適解は必ず基底解の中にある」などの基本的な知識は知っておくと役に立つと思われる．

例題 1.4（輸送計画問題）

自社のしろくまのぬいぐるみの工場が S_1, S_2, S_3 という 3 箇所にあり，4 つの都市圏 T_1, T_2, T_3, T_4 に輸送して販売することを考える．

- 工場 S_i のしろくまのぬいぐるみの生産量は b_i 単位
- 都市圏 T_j で売れるしろくまのぬいぐるみの量は β_j 単位
- 工場 S_i から都市圏 T_j へのしろくまのぬいぐるみの輸送費用は 1 単位あたり $c_{i,j}$

各都市圏に必要な量を輸送しつつ，輸送費用を最小化するにはどうすればよいか求めたい．この問題を最適化問題として表せ．ただし，生産量の合計と必要量の合計は等しい，つまり $\sum_{i=1}^{3} b_i = \sum_{j=1}^{4} \beta_j$ と仮定する．



解答　S_i から T_j への輸送量を $x_{i,j}$ 単位として,「輸送費用を最小化」「S_i からの輸送量の合計は b_i 単位」「T_j への輸送量の合計は β_j 単位」「$x_{i,j}$ は非負」を順に数式で書くと,

$$\begin{array}{lll} \text{最小化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{i,j}x_{i,j} & \\ \text{条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{i,j} = b_i & (i = 1,2,3) \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_{i,j} = \beta_j & (j = 1,2,3,4) \\ & x_{i,j} \geq 0 & (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4) \end{array}$$

となる. ■

総和記号 $\sum$ に抵抗のある者は，まず自分で目的関数と制約条件を全て書き下してみて，それから解答を見直すと総和記号のありがたみがわかるだろう（次回の例題 2.2 も参照せよ）．決定変数が全部で $3 \times 4 = 12$ 個あるが，いずれについても一次式なのでやはり線形計画問題である．

» **非線形計画問題**　目的関数や制約条件に一次式以外のものが現れる連続最適化問題は全て**非線形計画問題** (nonlinear programming problem) とよばれる．非線形計画問題はさらに，目的関数が凸関数でかつ制約条件を満たす領域が凸集合となる凸計画問題と，そうではない非凸計画問題の大きく 2 つに分けられる．凸計画問題に対しては効率的な解法が知られているが，非凸計画問題を解くのは容易ではない．その理由は，凸計画問題では停留点を見つければそれがそのまま最適解になるのに対し，非凸計画問題では「極小・極大だが最小・最

大ではない」点があることに起因する．最近研究が活発な深層学習 (deep learning) もある種の非凸計画問題に対する近似解法であるといえる[余談1.6]．ここで，「凸関数」「凸集合」という未定義の言葉が出てきたが，このテキストではこれ以上扱わないので[余談1.7]，興味を持った者はぜひテキスト末尾に挙げた入門書などで勉強していただきたい．

ここでは簡単な例を一つだけ紹介しておく．

例題 1.5（施設配置問題）

ある町には住宅が n 軒あり，その座標は $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ である．この町にしろくまのぬいぐるみを販売する店を出店する計画を立てる．なるべく多くの集客を得るために，一番遠い住宅からの距離が最小となる位置に置きたい．この問題を最適化問題として表せ．

解答　店の座標を (x, y) とすると，各住宅 (x_i, y_i) との距離は $\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ となる．したがって，問題をそのまま書くと

$$\text{最小化} \quad \max_{i=1,2,\dots,n} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

ということだが，max が入っていると数学的には扱いづらい．この目的関数を r と置けば，同じことを

$$\begin{aligned}
&\text{最小化} && r \\
&\text{条件} && \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \le r \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
& && r \ge 0
\end{aligned}$$

と書くこともできる．この問題の決定変数は x, y, r であり，制約条件が決定変数の一次式でないので，非線形計画問題である．■

この例では単純な条件としたが，実際には地価や工場からの商品の配送費用など，売り上げ見込みだけでなくコストの最適化も目指さなければならない．さらに，ぬいぐるみの売れそうな家と売れなさそうな家では重み付けを変えるといったマーケティング戦略も考えられる．現実の問題で直面する条件を盛り込んでいくとどんどん複雑な最適化問題と化していくだろう．

1.4　第 1 回の余談

1.1 高校までだと専ら「要素」という語を用いただろうが，大学では「元（げん）」ともいう．どちらも element「物事を成り立たせているもの」の訳語である．化学で元素と言ったように，これらの言葉には「それ以上分割できない」という意味も込められているが，実際には集合の要素が集合である場合もある．（元素と考えられていたものも実際にはさらに分解することができるのであった．）

要素と元のどちらを用いるのが正しいということはないので，好きな方を使えばよいが，元が要素と同じ意味だということは知っておくに越したことはない．なお，大学レベルの代数学を学ぶと「逆元」という言葉が出てくるが，これを「逆要素」ということはないので注意が必要である．

1.2 プログラミング言語の Python では，リストを通常 `[1, 3, 5, 7, 9]` のようにその要素を具体的に書くことで構成する．これは外延的定義に相当する．一方，`[2*n+1 for n in range(5)]` のようにして同じリストを構成するリスト内包表記とよばれる書き方もあるが，これは集合の内包的定義 $\{\, 2n + 1 : n = 0, 1, 2, 3, 4 \,\}$ に相当する．

1.3 実数を表す記号が $\mathbf{R}$ なのは英語の Real number の頭文字だとすぐわかるだろうが，整数が $\mathbf{Z}$ なのはなぜだろうか．これはドイツ語の Zahlen「数」に由来するとされている．第二次世界大戦以前はドイツが学術大国であったことの名残りだろうか．

書籍によってはこの二つを $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ という書体で表すことがある．これは黒板などで手書きで太字を表すときに普通に文字を書いてから 1 本線を入れる慣習があったのを書体にしてしまったもので，黒板太字（ブラックボード・ボールド）という．昔は印刷時は黒板太字ではなく通常の太字を使うべきだと言われていたようだが，数学者の間であまりにも普及してしまったために現在ではごく普通に書籍でも黒板太字を見かけるようになっている．

1.4 今まで散々コンピュータでプログラミングをしていながら，実はその語源を気にしたことがなかった．調べてみると，program の語源はギリシャ語の prographein（公示する）らしい．pro は「前に」，graphein は graph（絵）や gram（文字）の語源となった「書く」

という意味で，program は「事前に書き出す」というのが元々の意味ということになる．コンピュータにおいても同じで，プログラミングとは「事前に手順を書き出すこと」，プログラムとはそうして書かれたものということになるようだ．

1.5 数理計画問題を書くとき，「条件」の部分を “subject to” や略して “s.t.” と書くことがある．これは「……を条件として」という意味である．試験か何かで突然出てきても焦らないように．なお，数学では “s.t.” と書くと “such that”「……であるような」を意味することの方が圧倒的に多い．数学の文脈では “subject to” で条件を示すのは変数の動く範囲といった拘束条件を示す場合にほぼ限られ，それ以外の場合は “such that” が用いられる．

1.6 深層学習が非凸最適化なのにうまくいく理由については，例えば

> 二反田篤史，ニューラルネットワークの最適化理論，オペレーションズ・リサーチ **65** (2020) 643–649, `http://www.orsj.or.jp/archive2/or65-12/or65_12_643.pdf`

が探求の入口になるだろう．

1.7 第 6 回で「凸多面体」という言葉も出てくるので，定義ぐらいは書いておこう．$\mathbf{R}^n$ の部分集合 S が凸集合 (convex set) であるとは，任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in S$ と $0 \le t \le 1$ について $t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 \in S$ が成り立つことである．また，$\mathbf{R}^n$ 上で定義された実数値関数 $f(\boldsymbol{x})$ が凸関数 (convex function) であるとは，任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{R}^n$ と $0 \le t \le 1$ について $f(t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2) \le tf(\boldsymbol{x}_1) + (1-t)f(\boldsymbol{x}_2)$ が成り立つことをいう．線形計画問題の目的関数が凸関数，制約条件を満たす集合が凸集合であることは容易に確認できる．

第 2 回　線形代数の準備 1：ベクトルと行列

　複数の一次式がある場合には，その一つ一つをそのまま扱うよりも，ベクトル，行列という道具を導入すると統一的な扱いができるようになる．今回は線形計画法を学ぶうえで必要となるベクトル，行列の扱いについて学ぶ．

2.1　ベクトルの定義と基本演算

≫ **定義と記法**　**ベクトル** (vector) とは[余談2.1]，複数の値をひとまとめにして，一斉に足し算やかけ算などの操作ができるようにしたものである．ベクトルはまとめたい値を縦に並べて，それらを丸括弧か角括弧で括ることで表す[余談2.2]：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

ひとまとめになっていることがわかって，他のものとの混同が避けられればなんでもよいのだが，この混同の問題により**括弧ではなく絶対値のように縦棒で括るのは，行列式というベクトル・行列よりも前からあった別の概念を表すとほぼ決まっているので避けるべきである**[余談2.3]．また，同じ文章の中ではどの括弧を使うかは統一されるべきだろう．このテキストでは丸括弧を用いることにする．

　通常の数で $a = 2$ と文字を割り当てるように，ベクトルに対しても文字を割り当てることができる．例えば斜体太字で

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

などと書く[余談2.4]．

≫ **ベクトルの次元**　ベクトルに並べた値それぞれのことを**成分** (entry) といい，上から i 番目の成分のことを第 i 成分という余談2.5．例えば

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 46 \end{pmatrix}$$

ならば，第 1 成分が 8，第 2 成分が −3，第 3 成分が 46 である．ベクトルの成分の個数のことをそのベクトルの**次元** (dimension) といい，n 次元のベクトルのことを単に n 次元ベクトルという．n 次元ベクトルを全て集めた集合を $\mathbf{R}^n$ で表し余談2.6，**n 次元（実）ベクトル空間** (n-dimensional real vector space) という余談2.7．上記の $\boldsymbol{b}$ は三次元ベクトル，つまり $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^3$ である．

ところで，ドラえもんでは四次元空間なるものが登場して，タイムマシンで時間旅行をしたりする．これは時間が一次元と空間が三次元で合わせて四次元時空というわけで，空間内を移動するのと同じように時間を自由に移動できればタイムトラベルになるという発想であろう（もっと本格的な SF では相対性理論やワームホールを持ち出す）余談2.8．こうした物理学的な意味付けがされると四次元空間とはなんだか近寄り難いものに思えてくるが，これから学ぶ数学で四次元といったときには「成分が四つあるベクトルを考える」という以上の意味はない．線形計画法では高次元のベクトルが普通に出てくるが，恐れることはない．

≫ **ベクトルの等号，不等号**　ベクトルに限らず，数学で等号は左側のものと右側のものとが等しいことを表す余談2.9．二つのベクトルが等しいとは，次元が等しくかつその成分が全て等しいことと定義する．

例えば

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

成分が一つでも等しくないときは等号に斜線を引く：

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

ベクトル同士の不等号は，全ての成分がその不等号を満たすことと定義する．例えば

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 3.001 \\ 1000 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

である[余談2.10]．$>, \geq$ についても同様．あとで制約条件を表すのに頻繁に用いられる．

≫ **ベクトルの和とスカラー倍**　n 次元ベクトルが二つあるとき，その**和** (addition) を同じ位置の成分同士を足し合わせた結果で定義する：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

次元が違う二つのベクトルに対しては和は定義されない．例えば

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4\\-8\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-12\\7\end{pmatrix}.$$

ベクトルに対する用語として，実数のことは**スカラー** (scalar) ということがある．つまり，スカラーとは大きさ（スケール scale）のみを持ち，方向を持たない量ということである．カタカナで格好つけてるだけじゃないかと思うかもしれないが,「ベクトル場とスカラー場」のように専門用語で当たり前のように用いられることがあるので，教養として頭に入れておいた方がよい.

n 次元ベクトルに対して，実数 c による**スカラー倍** (scalar multiplication) を，全ての成分に c を乗じることと定義する：

$$c\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ca_1\\ca_2\\\vdots\\ca_n\end{pmatrix}.$$

例えば,

$$5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix},\quad -3\begin{pmatrix}4\\-8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\24\\-6\end{pmatrix}.$$

ベクトルの引き算は和とスカラー倍を組み合わせて，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}$$

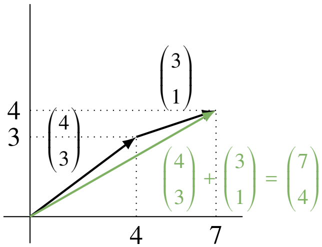


図 2.1　ベクトルの和.

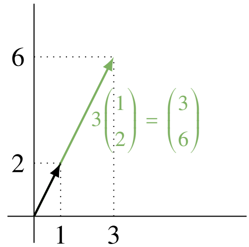


図 2.2　ベクトルのスカラー倍.

で定義する.

≫ **ベクトルの幾何的解釈**　ベクトルという語は元々ラテン語の vehere「運ぶ」に由来しており，これより「ある点を別のある点へ運ぶ」矢印のイメージが生じる．二次元ベクトルならば平面内の，三次元ならば空間内の矢印である．このとき，和は二つの矢印をつなげた先を新たな行き先とするベクトルを（図 2.1），スカラー倍は同じ方向に拡大・縮小したベクトルを（図 2.2），それぞれ表すことになる．このような見方は幾何学や物理学を学ぶ際には大変重要になる．

他方，ベクトルの始点が原点にあるとして見ると，ベクトルは単にある点の座標を表していると思うこともできる．この概念を**位置ベクトル** (position vector) という．線形計画法でベクトルを幾何的に見る場合，ほとんどは位置ベクトルである．位置ベクトルと思ったときに，和とスカラー倍はどのような役割を果たすのかというと，次のような左辺から右辺への分解が重要となる：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

つまり，左辺の座標は各軸の方向を向いた長さ 1 のベクトルをスカ

ラー倍して足し合わせたものとみなせるというわけである．このような「基本となるベクトルの足し合わせで表す」という考え方については付録 A で詳しく解説する．

我々が普段三次元の世界に住んでいる以上，幾何的解釈は四次元以上ではイメージが難しくなる．しかし，次元が増えてもその分だけ軸が増えるというだけで，二次元や三次元の場合からの類推が役に立つことが多い．また，三次元のものを二次元に投影して描くことができるように，高次元の図形を二次元で描くことも不完全ながらできなくはない．興味のある者は「多胞体」「クラインの壺」などを調べてみるとよい．

2.2　行列の定義と基本演算

≫ **行列の導入**　値を一次元に並べたものがベクトルであったが，値を二次元の長方形に並べたものは**行列** (matrix) という[余談2.11]．このようなものを導入する動機付けは次節ですぐやるが，定義と基本演算は簡単なので，先に済ませてしまおう．

2 行 3 列の行列の例は

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

のようになる．よく**行** (row) と**列** (column) のどちらがどちらなのかわからないという者がいるが，横書きの文章の 1 行，2 行，……と同じで横方向のまとまりが行，これに対する縦方向のまとまりが列である．行列に並べた値のこともベクトルと同様に成分といい，特に第 i 行第 j 列にある成分を (i, j) 成分という[余談2.12]．例えば，上の行列ならば $(1,1)$ 成分が 4，$(1,2)$ 成分が 6，$(1,3)$ 成分が 9，$(2,1)$ 成分が 0，

$(2,2)$ 成分が 3，$(2,3)$ 成分が 4 である．

一般に m 行 n 列の行列のことを $m \times n$ 行列や (m,n) 行列という：

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

このように，行列には大文字を割り当てることが多いが，必ずそうしなければならないというわけではない[余談2.13]．

$m \times n$ 行列を全て集めた集合を表す記号は，あまり統一されていないが，$\mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathrm{Mat}(m,n;\mathbf{R})$, $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ などを用いることが多い．特に

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 2}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$$

のように行数と列数が等しく n である行列は **n 次正方行列** (square matrix of order n) といい，行列の中でも大切な役割を果たす．

二つの行列が等しいとは，ベクトルの場合と同じで，サイズが等しくかつその成分が全て等しいことである．一方，不等号については成分同士を見るのではなく，別の意味付けがされる場合が多い．線形行列不等式は非線形計画法，特にその応用である最適制御理論では中心的な役割を果たすが，線形計画法では使わないので，ここでの説明は割愛する．

≫ **行列の和とスカラー倍**　行列に対しても，ベクトルと全く同様に

和とスカラー倍が定義される．つまり，

$$
\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix},
$$

$$
c\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & \dots & ca_{1,n} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & \dots & ca_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m,1} & ca_{m,2} & \dots & ca_{m,n} \end{pmatrix}.
$$

和は同じサイズの行列同士でないと定義されないことに注意．例えば，

$$
\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 0 & -9 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & -14 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}, \quad 4\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -16 \\ 20 & -24 \end{pmatrix}.
$$

行列の引き算も同様に

$$
\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{B}
$$

で定義する．

さらに，行列に対しては**転置** (transpose) という演算も定義される．これは $m \times n$ 行列から $n \times m$ 行列を作る演算で，単に行と列の役割が

入れ替わる．つまり，元の行列の (i,j) 成分が転置後の行列の (j,i) 成分になる：

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

転置の記号も色々あるが，上のように A^{T} とする他に，${}^{\mathrm{t}}A$ のように左上に t を書く場合も多い．具体例を書いておくと：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -5 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

定義より明らかに，転置は二回すると元に戻る：

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A. \tag{2.2}$$

転置の応用は次節ですぐに述べる．

2.3　行列・ベクトル積

ここまでに述べた演算だけを見ると，$m \times n$ 行列は mn 次元ベクトルとできることは大差ない．行列が真価を発揮するのはかけ算を導入してからである．

≫ **連立一次方程式をベクトルと行列で表す**　行列を導入する大きな動機の一つが**線形方程式系** (linear equations) の解法である．線形方程式系というとなんだか難しそうだが,「線形」は「一次」,「系」は「まとまり」という意味なので，結局のところ連立一次方程式のことであ

る．代数学とは元々は代数方程式の解法を研究する分野であり，その中で**線形代数** (linear algebra) は連立一次方程式の解法，およびここから派生したベクトルや行列の理論を研究する分野となっている．

次の連立一次方程式を考えよう：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 = 7. \end{cases} \tag{2.3}$$

これはベクトルを用いれば

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

と書くこともできる．左辺には x_1, x_2 という変数が二回ずつ現れているが，今は連立**一次**方程式なので，どの行にも各変数の一次の項が現れるのは明らかで，式を確定するには係数の情報だけが重要である．そこで，係数だけを抜き出して並べた行列を書いて，続けて変数を並べたベクトルを書くことで左辺のベクトルを表すことにする．つまり，

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

と書いてよいことにする．式 (2.4) の右辺のように行列・ベクトルを並べた結果が左辺になるという演算を**行列・ベクトル積** (matrix-vector product) という．これを用いると，方程式 (2.3) は

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

と書けることになる．

一般に，式が m 本の n 変数連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.5}$$

があれば，ここから $m \times n$ 行列と n 次元ベクトルの積（結果は m 次元ベクトル）が

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

で定義され，方程式 (2.5) は

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

と表される．このように，行列・ベクトル積は，行列の列数とベクトルの次元が等しいときにしか定義されないことに注意する．ここで用いられた行列とベクトルをそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times n},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n,\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m$$

と置こう．特に行列 A のことを方程式 (2.5) の**係数行列** (coefficient matrix) といい，方程式は簡単に

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表される．このように書いたうえで行列・ベクトルの中身を忘れてしまうと，まるで連立一次方程式がただの一次方程式 $ax = b$ であるかのように見えてくる．そこで，両辺を A で「割って」しまえば答えが求まるだろうというのが素朴な発想である．果たしてそんなことができるのかということを次回説明する．

例題 2.1

前回の生産計画問題の例題 1.3 の非負制約以外の制約条件

$$200x_1 + 100x_2 \leq 10000,$$
$$900x_1 + 300x_2 \leq 40000$$

を行列とベクトルを用いて一つの式で表せ．

解答　不等式になっても要領は同じであるが，不等号の向きは揃える必要があることに注意．この問題の場合は向きが揃っているので何も支障ない：

$$\begin{pmatrix} 200 & 100 \\ 900 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10000 \\ 40000 \end{pmatrix}.$$

非負制約を特別扱いする理由は第 5 回以降で学ぶ．■

例題 2.2

前回の輸送計画問題の例題 1.4 の非負制約以外の制約条件

$$\sum_{j=1}^{4} x_{i,j} = b_i \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i,j} = \beta_j \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

を行列とベクトルを用いて一つの式で表せ.

解答　$x_{i,j}$ をどの順番で並べるかにもよるが，例えば次のように書ける：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \\ x_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}.$$

7×12 行列を 12 次元ベクトルにかけているから 7 次元ベクトルになるということに注意. ■

≫ **行列の列ベクトル表示**　本質的には何も変わらないが，行列・ベクトル積の定義式 (2.6) の右辺を

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

と書いてみよう．この式の意味をよりはっきりさせるために，今後よく用いる記法を導入する．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

と書いたら，これは $m \times n$ 行列で，その (i, j) 成分は $\boldsymbol{a}_j$ の第 i 成分と定める．例えば

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}$$

のとき，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

である．つまり，ベクトルの成分がそのまま行列に入ると思えばよい．この記法を用いれば，式 (2.7) は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + x_2 \boldsymbol{a}_2 + \dots + x_n \boldsymbol{a}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i \tag{2.9}$$

ということだと理解できる．このことはあとで大変役に立つ．

≫ **行列・ベクトル積の幾何的解釈**　線形計画法の文脈ではあまり大事ではないが，線形代数の理論を述べていくうえでは重要なので，行列・ベクトル積の幾何的解釈についても説明しておく．これは計算練習も兼ねている．

一番簡単な，二次元の平面上の点の移動に限って考える．$\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^2$ を位置ベクトルとみなして，これに $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ を左からかければ新たな平面上の点 $A\boldsymbol{p} \in \mathbf{R}^2$ が得られる．これを $\boldsymbol{p} \mapsto A\boldsymbol{p}$ と点が移動したと考えようというわけだ．実際には，点の移動だけを見ていても理解が難しいので，三個の点が作る三角形の移動を見ることにする．

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

考える二次正方行列は

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

の四つとする．

まず I_2 をかけると，

$$I_2\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$I_2\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$I_2\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる．つまり I_2 はどの点も移動しない．一般に，全ての $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ に対して $I_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ であることは直接計算により示される．I_2 を二次の**単位行列** (identity matrix) という．n 次単位行列 $I_n \in \mathbf{R}^{n\times n}$ も全ての $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して $I_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たす行列として定義され，対角線上 (i, i) 成分が 1，それ以外の成分は全て 0 の行列となる．単位行列は行列の理論において大変重要な役割を果たす．なお，単位行列は次数が明らかな場合は単に I と書いたり，文献によっては E で表すこともある．

次に A をかけると

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{p}_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \\
A\boldsymbol{p}_2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \\
A\boldsymbol{p}_3 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．つまり A は第 1 成分を 2 倍，第 2 成分を 3 倍する行列である（図 2.3）．

次に C をかけると

$$
\begin{aligned}
C\boldsymbol{p}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
C\boldsymbol{p}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 + 1\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
C\boldsymbol{p}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

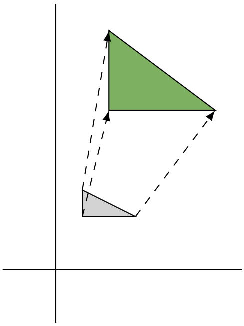


図 2.3　A による移動．

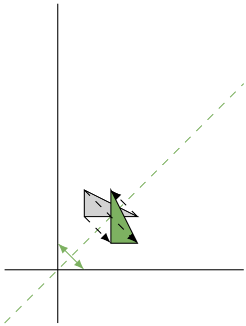


図 2.4　C による移動．

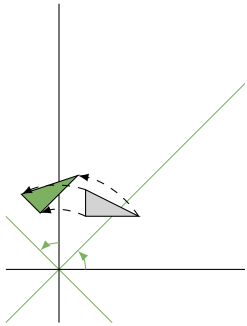


図 2.5　R による移動．

となる．つまり C は第 1 成分と第 2 成分を入れ替える（直線 $y = x$ について折り返す）行列である（図 2.4）．

次に R をかけると

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{5}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

となる．成分表示だとよくわからないが，図 2.5 を見るとわかるように R は原点を中心に $\pi/4$（45 度）回転する行列である．

これらのように，正方行列をかけて $\mathbf{R}^n$ の点を一斉に移動させる操作を**線形変換** (linear transformation) という．線形変換によって，拡大・縮小，反転，回転などの操作を表現できる．

行列の成分の幾何的意味を理解するために，例として先の回転行列 R が一般の二次元ベクトルをどこに移すかを考えてみよう．二次元ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と分解できる．一方，行列・ベクトル積の定義式 (2.9) より

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

である．つまり，R による変換は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

という軸の変換を引き起こすということが大切である．三角関数がわかっていれば，これは

$$\begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(0 + \pi/4) \\ \sin(0 + \pi/4) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \pi/2 \\ \sin \pi/2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\pi/2 + \pi/4) \\ \sin(\pi/2 + \pi/4) \end{pmatrix}$$

とも書けるので，確かに「二つの軸を $\pi/4$ 回転せよ」ということを言っている（図 2.6）．R 以外の一般の場合も，行列の各列は各軸を移す先のベクトルを表している（拡大行列 A の場合のように，軸の移す先のベクトルは向きだけでなく大きさも意味があることに注意）．

一般に，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0 + \theta) & \cos(\pi/2 + \theta) \\ \sin(0 + \theta) & \sin(\pi/2 + \theta) \end{pmatrix}$$

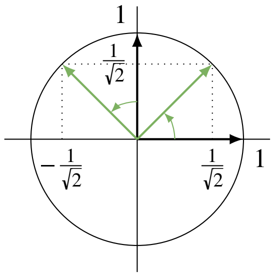


図 2.6　R による軸の $\pi/4$ 回転.

を二次の**回転行列** (rotation matrix) といい，その線形変換は原点を中心とする θ 回転となる.

≫ **内積**　ここまでベクトルと行列について説明してきたが，おそらく「なぜベクトルは値を縦に並べるのか」ということがずっと気になっているのではないだろうか．高校でベクトルを学んだ者は値を横に並べていたことであろう．

当たり前だが，次の二つの式は意味としては全く同じである：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

前者を**縦ベクトル**もしくは**列ベクトル** (column vector)，後者を**横ベクトル**もしくは**行ベクトル** (row vector) という．名前がついているぐらいだから，別に横に並べてもよいのではないだろうか．登場するのがベクトルだけならばそうなのだが，行列も出てくるとそうはいかなくなる．個人的な見解は余談に送るが[余談2.14]，事実として横ベクトルではなく縦ベクトルを主に用いるのが多数派となっている.

それでは，縦ベクトルがあれば横ベクトルの出番はないのだろうか．行列を既に知っている目で見ると，n 次元縦ベクトルと n 次元横ベクトルはそれぞれ $n \times 1$ 行列，$1 \times n$ 行列とみなすことができる．このようにベクトルも行列とみなすというのは便利な考え方で，例えば n 次元横ベクトルは n 次元縦ベクトルに左からかけることができることになる．結果は 1×1 行列になるが，これをスカラーとみなすのが通常である：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i. \tag{2.10}$$

このように，次元が等しい二つのベクトルの成分同士をかけた結果を合計する演算を**内積** (inner product) といい，現代数学では大変重要な役割を果たす．二つのベクトルがどちらも縦ベクトルの場合はどうするかというと，$n \times 1$ 行列（縦ベクトル）を転置すれば $1 \times n$ 行列（横ベクトル）になることを用いる：

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

つまり，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ の内積は転置を用いて $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ と書ける．内積を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ や $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ で表す記法もよくあるのだが，このテキストでは $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ を線形計画問題の目的関数を表すのによく用いる．

例題 2.3

前回の生産計画問題の例題 1.3 の目的関数

$$2000x_1 + 750x_2$$

を二つのベクトルの内積で表せ．

解答

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 750 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と置けば，目的関数は $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ と表せる． ■

この他の転置の応用として，線形計画法では双対理論において非常に重要な役割を果たす．これについては第 11 回で述べる．あとは単なる記法の話になるが，縦ベクトルを書くと縦に長くスペースをとってしまうことから，横ベクトルの転置で縦ベクトルを表すという記法がよく用いられる．例えば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を表すのに $(1\ 2\ 3)^{\mathrm{T}}$ と書いておけば紙面が節約できる．些細なことに感じられるであろうが，実際によく見る記法である．

例題 2.4

前回の輸送計画問題の例題 1.4 の目的関数

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{i,j}x_{i,j}$$

を二つのベクトルの内積で表せ.

解答 $\boldsymbol{c} = (c_{1,1}\ c_{1,2}\ c_{1,3}\ c_{1,4}\ c_{2,1}\ c_{2,2}\ c_{2,3}\ c_{2,4}\ c_{3,1}\ c_{3,2}\ c_{3,3}\ c_{3,4})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x} = (x_{1,1}\ x_{1,2}\ x_{1,3}\ x_{1,4}\ x_{2,1}\ x_{2,2}\ x_{2,3}\ x_{2,4}\ x_{3,1}\ x_{3,2}\ x_{3,3}\ x_{3,4})^{\mathrm{T}}$ と置けば，目的関数は $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ と表せる. ■

≫ **行列の行ベクトル表示** 行列の列ベクトル表示 (2.8) と同様に，行ベクトル表示というものもある. 例えば，$m \times n$ 行列を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbf{R}^n$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

と表すことができる. この記法を用いれば，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ に対する行列・ベクトル積 (2.6) を，内積を用いて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

と書ける．つまり，行列・ベクトル積の結果のベクトルの第 i 成分は，A の第 i 行と $\boldsymbol{x}$ の内積 $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ によって定義される．実際の計算時にはこれを頭にイメージしている場合が多いだろう．

また，列ベクトル表示した行列の転置をとると，行ベクトル表示で表される．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m$ として，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

さらに，転置を二回すると元に戻ること (2.2) を用いると，行ベクトル表示した行列の転置は列ベクトル表示になることもわかる：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

2.4　第 2 回の余談

2.1 「ベクトル」はドイツ語読みで，英語では「ベクター」と発音するが，日本では「ベクトル」で定着している．

2.2 ベクトルや行列を括る括弧は世の中で統一してほしいものだが，19 世紀にこれらの概念ができてきた頃から丸括弧 ()，角括弧 []，山括弧 $\langle\rangle$，波括弧 {} で括るなど人によって違っていて，その後の自然淘汰を経ても丸括弧と角括弧の二つはどちらも生き残ってしまっている．実際に本や論文をたくさん読むとどちらも同程度に見かけることに気付くだろう．

2.3 もはや完全に定着してしまっているが，正方行列 A の行列式を $|A|$ で表すのは絶対値と紛らわしい場合があってよくないとも思われる．典型的なのが重積分の変数変換公式

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

を書くときで，ここで $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ はヤコビアンという行列式，それを縦棒で括っているのは行列式の値の絶対値という意図なのだが，縦棒が行列式を表しているという誤解が後を絶たない．ヤコビアンについては第 14 回も参照.

2.4 ベクトルを斜体太字で $\boldsymbol{a}$ のように表す記法は，高校まででベクトルを学んだことがあれば $\vec{a}$ と書くべきではないかと思われるだろう．実のところ，ベクトルだからといって特別扱いする必要は全くなくて，他の文字と同じように a と書く文献もたくさんある．一方で，大学初年次レベルぐらいまでの数学では一見してベクトルだとわかるようにしておくと便利なこともあって，斜体太字で $\boldsymbol{a}$，立体太字で $\mathbf{a}$，矢印をつけて $\vec{a}$ など，文献によって本当にバラバラである（だんだん特別扱いしなくなるのは，どんどん新しい概念が出てくるのを記法で区別していてはキリがないため）．ただ，日本国内の大学の教科書に限れば斜体太字で表すのが多数派と思われるので，このテキストでも斜体太字で表すことにする．

この記法の話からもわかるように，学問はこれまでの長い歴史を経て形成されたものであり，また現在も発展し続けているものである．概念の名前・定義や細かな流儀・記法は必ずしも統一されたものがあるとは限らず，その人の問題意識や，文章化するうえでの利便性，もしくは好みによって設定される．高校までは学習指導要領があって統一されていたのだが，高校を出ればそうではない世界が広がっているということを理解していただければと思う．

2.5 よく成分の番号に i を使うのは index の頭文字であると言われている．複数の文字が必要な場合はアルファベット順に j, k, l, ... を用いていくが，m, n は整数を表すのによく用いるのですぐにかぶってしまう．数学をやっているとラテン文字（アルファベット）は 26 文字，大文字小文字を両方使っても 52 文字で，慣習で各文字の使用場面が大体決まっていることもあって，あっという間に使える文字がなくなってしまう．α, β, γ, δ, ϵ, ... といったギリシャ文字をわざわざ使うのはこのためなのだが，こちらも 24 文字しかないうえ，大文字は多くがラテン文字と同じ形で使えないため（例えば $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ の大文字は順に A, B, Γ, Δ, E で，Unicode では字形がラテン文字と同じでも別のコードが与えられている），論文を書く際には苦しむことになる．

なお，i は虚数単位 (Imaginary unit) にも用いられるが，使用場面からして混乱が起こることはほとんどないだろう．さらに脱線すると，虚数単位は i で表すとは限らず，一部の数学者は $\sqrt{-1}$ と書くし，電気分野では i は電流を表すので（Intensity of electric current らしい）虚数単位は i の代わりに j で表すことになっている．

2.6 集合論で直積という概念があり，例えば

$$\{1,2,3\} \times \{4,5\} = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

である．一般に，集合 A, B があるとき，$A \times B = \{\,(a,b) : a \in A, b \in B\}$．有限集合ならば $A \times B$ の要素数は A の要素数と B の要素数の積になるので直積というのだろう．これを n 個の集合の直積に拡張すると，n 次元（実）ベクトルは実数が n 個なので $\overbrace{\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}^{n\text{ 個}} = \mathbf{R}^n$ ということになる．

このテキストでは実ベクトルしか使わないが，成分が複素数のベクトルを考えることもできる．複素数 (complex number) 全体は $\mathbf{C}$ で表すので，$\mathbf{C}^n$ は n 次元複素ベクトル空間を表すことになる．他に n 次元整数格子 $\mathbf{Z}^n$ などもある（これは係数 $\mathbf{Z}$ が体でなく環なのでベクトル空間とは呼ばず，加群という）．

2.7 「空間」というと三次元のことを想起するだろうが，線形代数の文脈では一次元だろうが二次元だろうが，果ては 100 次元だろうが全て「空間」という．現代数学で「空間」というと，一つ一つの要素を点とみなして，点同士の間になんらかの関係が入っている集合のことを指し，$\mathbf{R}^n$ とこれを一般化した概念で用いられることが多い用語法である．なお，筆者は久々に高校数学の教科書をめくったときに「座標空間」とだけ書いてある問題に出会い，これは二次元なのか三次元なのかとしばらく真剣に悩んだことがある．数学者の常識は世の非常識．

2.8 四次元どころか，素粒子から宇宙まで全てを説明することを目指す超弦理論では世界は 10 次元時空，M 理論では世界は 11 次元時空であって，我々の認識している四次元を引いた残りの次元はカラビ・ヤウ多様体によりコンパクト化されているので認識できないということになっている（現時点で実験による観測も成功していない）．超弦理論の元となる弦理論では 26 次元が必要でさすがに無理があったらしい．この文を書いている今の筆者には自分で何を書いているのかさっぱりわかっていない．

2.9 学生の中には等号は「左から右が導かれる」「左の答えは右である」という意味だと思っている者がいるようだ．そういう者は等しくないものを平気で等号で結んでしまうので，答案を見ていて頭が痛くなる．

2.10 筆者は今までそのような場面に遭遇したことはないが，両辺が定数の場合に $3 \leq 4$ のような不等式は正しくなくて $3 < 4$ と書かなければならないと思っている者がいるらしいと聞いたことがある．もちろん $3 \leq 4$ は「3 は 4 以下である」を意味する正しい不等式である．$x \leq 4$ を $x = 3$ は満たすはずだが，数値が固定された段階で両辺は等しくないから等号は外さなければならないという誤解のようである．

2.11 英語の matrix は「何かを生み出すもの」「母体」という意味がある．元々は determinant（意味は「決定式」だが，「行列式」と訳す）という概念が先にあって，数を長方形に並べたものがあればそこからたくさん determinant が生み出されるということから，19 世紀イギリスのシルベスターによって名付けられたようである．昔の日本では外来語である西洋数学用語をうまく翻訳する努力がされていたようで，matrix は単に行・列に数を並べるから行列となったようだ．他方，同時期に入ってきたはずの vector が翻訳されなかった理由は謎である．日本では外来語はなんでもカタカナにできてしまうが，漢字のみを用いる中国では今でも外来語は音や意味の合う漢字にうまく翻訳されているようだ．では，中国語で「ベクトル」はどう書くのだろうか？

2.12 横書き文化なので (i, j) 成分は「下に i，右に j」だが，同じ横書き文化でも PC のディスプレイの座標 (x, y) は「右に x，下に y」である．一方，縦書き文化になると，将棋の棋譜で○△銀は「左に○，下に△」．話は変わって，数学の平面座標だと右手系と言って

反時計回りで，(x, y) は「右に x，上に y」．ところで，表計算の場合は……，囲碁の場合は……，チェスの場合は…….

2.13 このテキストで一般の行列の成分を表すのに用いている $a_{i,j}$ という下付き添字の記法は，多くの本では a_{ij} となっており，間にコンマを入れない．しかし，そうすると大抵明らかとはいえ，ij は i と j なのか $i \times j$ なのか，また $a_{1,1}$ はコンマがないと a_{11} となるが 1 が二つなのか 11（十一）なのかが区別しづらくなるので，間にコンマを入れるのが筆者の好みである．コンマを入れない派でも文字が三つになると区切りがわからなくなるのでコンマを入れて，例えば a_{111} ではなく $a_{11,1}$ のように書く．

このような「大抵明らかだから」紛らわしい可能性があっても省くという記法は他にもあって，例えば幾何学や物理学では下付き添字のように変数を区別する目的で上付き添字を $a^1, a^2, a^3, \ldots$ のように用いることがある．ベキ乗と非常に紛らわしいが，このように上下で添字を書き分けると，どれが共変でどれが反変なのかが一目で判別でき，計算する際に便利なようだ（アインシュタインの縮約記法というものがある）．これらの分野ではなく自分で何か書いていて，下付き添字を既に使っているところで上付き添字を合わせてどうしても使いたいという場面では，上付きの方は括弧をつけて $a_n^{(m)}$ のようにすると紛れがない．

2.14 以下はあくまでも筆者の見解であり，なんらかの史料に基づいているというわけではない．

行列・ベクトル積の導入を振り返ってみると，

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 = 7 \end{cases}$$

を

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

と書くということであった．係数行列と右辺のベクトルは式からその順番のまま拾ってきたという感じで違和感はないが，問題は変数のベクトルだろう．元の式では x_1, x_2 が左から右に並んでいるのだから，

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{（正しくない式）}$$

と書きたくなる．しかし，幾何的解釈もできるようにしようとすると，正方行列を横ベクトルにかけた結果が縦ベクトルになってしまうのはなんだか気持ちが悪い．縦でも横でも同一視してしまうという手はあるかもしれないが，次回学ぶように行列・行列積を考えようとすると，縦なのか横なのかで違いが出てくるため，いちいち縦横が変わっては積の定義の整合性がとれなくなってしまうのである．それならば右辺のベクトルも横ベクトルにしてしまえということを考えるが，今度は元の式が縦に並んでいることと合

わなくなり，あちらを立てればこちらが立たずとなることがわかる．結局，変数か右辺のどちらかに犠牲になってもらう他なく，横書きでベクトルを等号で結ぶときや，行列の列ベクトル表示 (2.8) で都合がよいということもあってか，縦ベクトルを主に使うのが主流となっている．

このように，定義を他人から与えられたものとして済ませず，自分でその妥当性をあれこれ考えてみると理解が深まるし，何よりも楽しいことでもある．

第 3 回　線形代数の準備 2：行列・行列積と逆行列

線形計画問題の解法であるシンプレックス法は，連立一次方程式の掃き出し法という解法を最適解が見つかるまで繰り返す方法であるとみなすことができる．今回は準備として，行列・行列積を導入し，連立一次方程式の解を表すために重要な逆行列の概念を述べる．

3.1　行列・行列積

≫ **行列・行列積の定義**　前回学んだように，式が m 本の n 変数連立一次方程式は，$A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ を用いて

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{3.1}$$

と表すことができる．この式の見た目は（スカラーの）一次方程式

$$ax = b \tag{3.2}$$

とよく似ている．一次方程式 (3.2) は両辺を a で割れば $x = b/a$ と簡単に解くことができる．ならば，連立一次方程式 (3.1) についても両辺を A で「割る」ことはできないだろうか．このことを考えるためには，まずは行列同士のかけ算を定義しなければならない．

行列同士のかけ算とはなんなのかよくわからないが，材料として既に行列・ベクトル積は定義してある．$B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ と $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ があれば新たなベクトル $B\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$ が計算できる．そこで，これにさらに $A \in \mathbf{R}^{l \times m}$ をかけて $A(B\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^l$ を計算することを考えよう．括弧がついているのは $B\boldsymbol{x}$ を計算してから A をかけることを強調するためだが，もし通常の数のかけ算のように結合法則が成り立つならば

$$A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$$

となって然るべきだろう．右辺の AB が定義したい**行列・行列積** (matrix-matrix product) だが[余談3.1]，n 次元ベクトルにかけた結果が l 次元になるのだから，AB のサイズは $l \times n$ である．あとはこの等式が成り立つように AB を A と B から定めればよい．

準備として，基本的な定理を述べておく．

定理 3.1（行列・ベクトル積の分配法則）

任意の $A \in \mathbf{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbf{R}^n, c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ に対して

$$A(c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2) = c_1A\boldsymbol{b}_1 + c_2A\boldsymbol{b}_2$$

が成り立つ．

なお，三つ以上の場合も同様で $A(c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3) = c_1A\boldsymbol{b}_1 + c_2A\boldsymbol{b}_2 + c_3A\boldsymbol{b}_3$ などが成り立つ．冒頭の「任意の……に対して」(for any ...) は「どの……でも」という意味で，指定された条件を満たすものならばどれを選んでもよいということを表す，数学独特の言い回しである．

証明　直接計算による．

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m,$$
$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \dots & b_{n,1} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{1,2} & b_{2,2} & \dots & b_{n,2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

とすると，行列・ベクトル積の定義 (2.9) より

$$
\begin{aligned}
A(c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 b_{1,1} + c_2 b_{1,2} \\ c_1 b_{2,1} + c_2 b_{2,2} \\ \vdots \\ c_1 b_{n,1} + c_2 b_{n,2} \end{pmatrix} \\
&= (c_1 b_{1,1} + c_2 b_{1,2})\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (c_1 b_{n,1} + c_2 b_{n,2})\boldsymbol{a}_n \\
&= c_1(b_{1,1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{n,1}\boldsymbol{a}_n) + c_2(b_{1,2}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + b_{n,2}\boldsymbol{a}_n) \\
&= c_1 A\boldsymbol{b}_1 + c_2 A\boldsymbol{b}_2
\end{aligned}
$$

を得る. ■

それでは，$A(B\boldsymbol{x})$ を計算してみよう.

$$
A \in \mathbf{R}^{l\times m}, \quad B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times n}, \quad \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n \in \mathbf{R}^m,
$$
$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

とすると，行列・ベクトル積の定義 (2.9) より

$$
A(B\boldsymbol{x}) = A(x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n)
$$

なので，分配法則を使って

$$
\begin{aligned}
&= x_1 A\boldsymbol{b}_1 + x_2 A\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n A\boldsymbol{b}_n \\
&= \begin{pmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \dots & A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}\boldsymbol{x}.
\end{aligned}
$$

これが $(AB)\boldsymbol{x}$ と等しいことを要請すると，

$$
AB = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \dots & A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{l\times n} \tag{3.3}
$$

が行列・行列積の定義となる[余談3.2]．このように，行列・行列積は右側の行列を列ベクトルが並んだものとみなして，行列・ベクトル積をまとめて計算する演算である．行列・ベクトル積の場合と同様に，行列・行列積は左側の行列の列数と右側の行列の行数が等しくないと定義されないことに注意する．

例題 3.1

次の行列・行列積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

解答

(1) 2×3 行列と 3×2 行列の積なので，結果は 2×2 行列になる．各列を計算すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 139 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 154 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

となる．

(2) 3×2 行列と 2×3 行列の積なので，結果は 3×3 行列になる．各列を計算すると

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 49 \\ 59 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 \\ 68 \\ 82 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 \\ 87 \\ 105 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 54 & 69 \\ 49 & 68 & 87 \\ 59 & 82 & 105 \end{pmatrix}$$

となる．■

≫ **行列・行列積の内積を用いた定義**　行列・行列積の定義 (3.3) において，A を行ベクトル表示して，行列・ベクトル積の内積を用いた定義 (2.11) を適用してみよう．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_l \in \mathbf{R}^m$ として

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

と表すと，

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

となる．つまり，AB の (i, j) 成分は A の第 i 行と B の第 j 列の内積で定義される．線形代数の教科書ではこれがいきなり行列・行列積の定義として導入されることがほとんどで，大学の授業では「**行列**の積なのだから，**行**と**列**をかけよ！」と指導される．そのように教えるのは洗練されてはいるが，定義の心は不明瞭になってしまう．定義→定理→応用の流れからその心を掴めというのは数学書の既に確立したスタイルであるし，読み解く訓練をさせた方が学生にとっても望ましいのかもしれないが，このテキストでは非数学科の学生向けの入門ということであえて行列・行列積の定義に至るストーリーを長々と書いてみた．数理最適化のテキストなのに最適じゃないと感じられた方は市販の教科書で勉強した方がよいだろう．

例題 3.2

次の行列・行列積を (3.4) を用いて計算せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

解答　順に成分を計算すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 22,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 43, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 50$$

なので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

である. ■

≫ **行列・行列積のさらに別の表示**　次回の掃き出し法をよりよく理解するために，行列・行列積のさらに別表示を導出しておく．準備として，次の定理を証明する．

定理 3.2（行列・行列積の転置）

任意の $A \in \mathbf{R}^{l\times m}$, $B \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対して

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

が成り立つ.

証明　まず，行列・行列積の内積表示 (3.4) と転置の定義 (2.1) より，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_l \in \mathbf{R}^m$ と $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n \in \mathbf{R}^m$ を用いて

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

と表せるとき,

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n & \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n & \dots & \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

である．一方，列ベクトル表示の転置 (2.12) と行ベクトル表示の転置 (2.13) より

$$B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_l \end{pmatrix}$$

なので,

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_l \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_l \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_l \end{pmatrix}$$

である．ここで，内積の定義 (2.10) より $\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_i$ なので，確かに $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ である． ■

行列・ベクトル積 (2.9) の両辺を転置して定理を適用すれば,

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} + x_2 \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \quad (3.5)$$

がわかる[余談3.3]．さらに行列・行列積 (3.3) の両辺を転置して定理を適用すると，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_l \in \mathbf{R}^m$ と $B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ に対して

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} B \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_l^{\mathrm{T}} B \end{pmatrix}$$

であることがわかるから,

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,m} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_m \in \mathbf{R}^n$$

としてベクトル・行列積 (3.5) を適用すれば

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l,1} & a_{l,2} & \dots & a_{l,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} + a_{1,2} \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + a_{1,m} \boldsymbol{b}_m^{\mathrm{T}} \\ a_{2,1} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} + a_{2,2} \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + a_{2,m} \boldsymbol{b}_m^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ a_{l,1} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} + a_{l,2} \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + a_{l,m} \boldsymbol{b}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

を得る．なるべく成分を書かず楽に示してみたが，もちろん成分を直接計算して確認することもできる．

例題 3.3

次の行列・行列積を (3.6) を用いて計算せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

解答　行ごとに

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 50 \end{pmatrix}$$

と計算できるので，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

である． ■

≫ **行列・行列積の非可換性**　行列・行列積は列数と行数が一致しないと定義されないので，一般にはかけ算の順番を入れ替える（AB と BA を同時に考える）ことができない．入れ替えても積が定義されるのは $m \times n$ 行列と $n \times m$ 行列の場合だが，この場合も入れ替えると $m \neq n$ ならば結果が $m \times m$ か $n \times n$ かと変わる．入れ替えても結果が一致する可能性があるのは $n \times n$ 同士，つまり正方行列同士をかけた場

合のみである．しかし，通常の数の場合とは違って，**正方行列同士の積の場合でも，順番を入れ替えると結果が異なる，つまり $AB \neq BA$ となるのが通常であるという事実を頭に叩き込んでおいてほしい**．このことを行列・行列積は**非可換** (noncommutative) であるという．

行列・行列積が非可換である理由は，幾何的には次のように説明できる．そもそもなぜ実数のかけ算では**可換** (commutative)，つまり交換法則 $ab = ba$ が常に成り立っていたのかを思い出すと，小学校で学んだ通り，かけ算は長方形の面積を表すと考えられるので，縦横を入れ替えても面積は変わらないということであった[余談3.4]．ところが正方行列は前回学んだように線形変換を表していて，これは順番を入れ替えると違う変換結果になりえるのである．実数のかけ算が交換可能なのが特殊であって，世の中では順番を変えてはいけないことの方がむしろ多い．例えば，靴下を履いてから靴を履くのを，順番を入れ替えて靴を履いてから靴下を履いては悲惨なことになる．

具体例として，前回の線形変換

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える．A は x 方向に 2 倍，y 方向に 3 倍する変換，C は x と y を入れ替える変換であった．このとき，

$$AC\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 3x \end{pmatrix}, \quad CA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \\ 2x \end{pmatrix}$$

であって，順番を入れ替えると一致しない．行列・行列積で見れば

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

で $AC \neq CA$ というわけである．自分でも適当な行列を二つ作って計算してみれば，多くの場合に非可換であることが確かめられるだろう．

具体例を目の当たりにすると，このようなことが起こるのは C のように「変換後の x 座標を決めるのに y 座標の値が必要」という状況に原因がありそうに思えてくる．実際，どんなときでも行列・行列積が非可換であるというわけではなく，可換になる場合もある．A のように (i,i) 成分だけに 0 とは限らない値があって，他の成分は全て 0 の行列を**対角行列** (diagonal matrix) というが，対角行列同士はいつも可換である．これは

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 \\ 0 & d_{2,1} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} d_{1,2} & 0 \\ 0 & d_{2,2} \end{pmatrix}$$

とすれば，直接計算で

$$D_1 D_2 = D_2 D_1 = \begin{pmatrix} d_{1,1}d_{1,2} & 0 \\ 0 & d_{2,1}d_{2,2} \end{pmatrix}$$

と確認できる（三次以上でも同様なのは明らか）．対角行列は変換後の x 座標と y 座標がそれぞれ元の x 座標と y 座標のみに依存している．よって，それぞれの座標ごとに独立して考えることができて，実数のかけ算の可換性が効くのである．

実は，C もうまく座標軸を選べばこれと同じ状況にすることができて，この座標で見た場合に限れば対角行列のように振る舞うということがわかる．これを**対角化** (diagonalization) という．二つの行列がある共通の座標で見ればどちらも対角行列になるとき，この二つの行列は可換であることが示される．線形計画法では対角化は使わないので

説明はこれぐらいにするが，詳しく学びたい者は線形代数の教科書で勉強してほしい．関連する話は付録 A にも少しだけある（基底と座標系）．

例題 3.4

二つの行列を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

とするとき，$AB \neq BA$ を確認せよ．

解答　計算すると，

$$AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

なので，確かに $AB \neq BA$ である．■

3.2　逆行列

≫ **逆行列の定義**　それでは，話を戻して行列 A で割れるかどうかを考えよう．割り算と言われれば，分数表記を想起するだろう：

$$\frac{B}{A}. \qquad \textbf{（通常用いない表記）}$$

ところが，前節で学んだように，一般に二つの行列の積は非可換なので，割り算についても左から割るのか右から割るのかで結果は異なってしまいそうである．それならば

$$\frac{1}{A}B, \quad B\frac{1}{A} \qquad \textbf{（通常用いない表記）}$$

という記法ならばよいかというと，やはりこう書いてあると B を分子に乗せたい誘惑に駆られるので，分数表記は行列にはあまり適していなさそうだという結論になる．

それでは，分数表記を使わずに割り算をかけ算で表すにはどうすればよかっただろうか．小学校で割り算はある数をいくつかに等分する演算として導入されるが，分数のかけ算を学んだ後に，a で割ることは $1/a$ をかけることと同じだとして，**逆数** (inverse of a number) という概念が導入された．教科書から引けばおおよそ次の通りである：

> 二つの数の**積が 1** のとき，一方の数を他方の数の**逆数**という．ある数で割ることは，その数の逆数をかけることと同じである．

このように，逆数 a^{-1} は a にかけると 1 になるということが重要なのであった．実際，一次方程式 $ax = b$ を解くとき，両辺に a^{-1} をかけると $a^{-1}ax = a^{-1}b$ だが，$a^{-1}a = 1$ かつ $1x = x$ だから $x = a^{-1}b$ となるのである．逆数の導入により，整数以外でも割るという操作が可能になった．

逆数の説明文中の「数」をそのまま「行列」に変えれば

> 二つの行列の**積が 1** のとき，一方の行列を他方の行列の**逆行列**という．ある行列で割ることは，その行列の逆行列をかけることと同じである．

となる．概ねこれが**逆行列** (inverse of a matrix) の定義として正しい説明なのだが，「積が 1」というところだけ数が残ってしまっている．一次方程式を解くときの類推でいけば，連立一次方程式を解くために $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} をかければ $A^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ となる．左辺が $\boldsymbol{x}$ となってほしいが，そのためには $A^{-1}A = \boldsymbol{I}_n$，つまり単位行列ならば $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ である．

以上の考察より，A の逆行列 A^{-1} の定義を

$$A^{-1}A = I_n$$

が成り立つこととする．ただし，**逆行列 A^{-1} が定義されるのは A が正方行列の場合だけである**ということに注意しておく．A が n 次正方行列ならば A^{-1} も n 次正方行列である．正方行列にしか定義されない理由は，そもそも連立一次方程式を解くという観点からは，係数行列が長方行列の場合はただ一つだけの単位行列を考えれば解が（全て）求まるわけではないということにある[余談3.5]．どういうことかは次回の連立一次方程式の解法を学べばわかるだろう．

≫ **二次の逆行列**　これだけページ数を割いて逆行列を導入しておいてなんだが，実際には逆行列を求めるというのは二次の場合を除いてあまり簡単ではなく，連立一次方程式を解く場合には次回述べる掃き出し法を用いるのが通常である．線形計画法の説明に逆行列をわざわざ導入する意義は，一般的な状況においてある連立一次方程式の解を表したいときに，具体的な成分には触れずに簡潔に書けるということにある．例えば n 本の n 変数連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ と，A や $\boldsymbol{b}$ の成分がわからなくてもとりあえず書くことができる．

しかし，具体例が何もないとわかりづらいと思われるので，簡単な二次の場合に限って計算をしてみよう．$A, X \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ の成分を

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}$$

とする．もし $XA = I_2$ となるような $x_{i,j}$ を定めることができれば，それが求める逆行列 $X = A^{-1}$ となる．$XA = I_2$ の両辺の成分を書いて

みると

$$\begin{pmatrix} x_{1,1}a_{1,1} + x_{1,2}a_{2,1} & x_{1,1}a_{1,2} + x_{1,2}a_{2,2} \\ x_{2,1}a_{1,1} + x_{2,2}a_{2,1} & x_{2,1}a_{1,2} + x_{2,2}a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，行ごとに見ると

$$\begin{cases} x_{1,1}a_{1,1} + x_{1,2}a_{2,1} = 1, \\ x_{1,1}a_{1,2} + x_{1,2}a_{2,2} = 0, \end{cases} \tag{3.7a}$$

$$\begin{cases} x_{2,1}a_{1,1} + x_{2,2}a_{2,1} = 0, \\ x_{2,1}a_{1,2} + x_{2,2}a_{2,2} = 1 \end{cases} \tag{3.7b}$$

という二つの連立一次方程式を得る．

ここで，次回にもつながるので連立一次方程式の解き方を簡単に思い出しておくと，

- $a = b$ かつ $c = d$ ならば $a + c = b + d$
- $a = b$ ならば $ca = cb$

という等式の操作規則を用いて各式の係数を消していく（0 にする）のであった．ただし，両辺に 0 をかける操作は $0 = 0$ という自明な等式を生むだけなので意味がない．「代入して文字を消去する」と覚えている者もいるかもしれないが，同じことである[余談3.6]．

それでは，一つ目の方程式 (3.7a) を $x_{1,1}, x_{1,2}$ について解こう．二本の式の $x_{1,1}$ の係数を揃えるために，第 1 式に $a_{1,2}$ を，第 2 式に $a_{1,1}$ をそれぞれかけると

$$x_{1,1}a_{1,1}a_{1,2} + x_{1,2}a_{1,2}a_{2,1} = a_{1,2},$$

$$x_{1,1}a_{1,1}a_{1,2} + x_{1,2}a_{1,1}a_{2,2} = 0,$$

となる． したがって，第 1 式の両辺を –1 倍したものを第 2 式に加えれば，第 2 式から $x_{1,1}$ の係数が消えて

$$x_{1,2}(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}) = -a_{1,2}$$

を得る．もし $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ ならば，これで第 2 式の両辺を割ることができて

$$x_{1,2} = -\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}.$$

これの両辺を $-a_{2,1}$ 倍して (3.7a) の第 1 式に加えれば, 第 1 式から $x_{1,2}$ の係数が消えて

$$x_{1,1}a_{1,1} = 1 + \frac{a_{1,2}a_{2,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} = \frac{a_{1,1}a_{2,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}$$

なので，両辺を $a_{1,1}$ で割れば[余談3.7]

$$x_{1,1} = \frac{a_{2,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}.$$

こうして方程式 (3.7a) が解けた．同様にして方程式 (3.7b) も $x_{2,1}$，$x_{2,2}$ について解けば

$$x_{2,1} = -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}, \quad x_{2,2} = \frac{a_{1,1}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}$$

を得る．以上より，（どの成分も分母が共通なので外にスカラー倍で出して）

$$A^{-1} = X = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

を得る．ただし $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ であり，これが二次の逆行列が存在するための必要十分条件となっている．実数の場合に a^{-1} が存在するためには $a \neq 0$ が必要十分なのと同じで，A^{-1} が存在するために 0 であってはならない A の成分の式を**行列式** (determinant) という．つまり，二次正方行列 A の行列式は $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$ である．行列式が 0 でなく，逆行列が存在する行列は**可逆** (invertible)，もしくは**正則** (regular)，**非特異** (nonsingular) であるという．

計算結果が正しいことを確認しておこう．

$$\begin{aligned}
A^{-1}A &= \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1} & a_{2,2}a_{1,2} - a_{1,2}a_{2,2} \\ -a_{2,1}a_{1,1} + a_{1,1}a_{2,1} & -a_{2,1}a_{1,2} + a_{1,1}a_{2,2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.
\end{aligned}$$

確かに正しい．ところで，非可換性が気になるので順番を入れ替えてみると

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} & -a_{1,1}a_{1,2} + a_{1,2}a_{1,1} \\ a_{2,1}a_{2,2} - a_{2,2}a_{2,1} & -a_{2,1}a_{1,2} + a_{2,2}a_{1,1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2
\end{aligned}$$

となる．つまり $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$ であり，二次の逆行列は元の行列

と可換であることがわかった．大事なので，定理としてまとめておこう．

定理 3.3（二次の逆行列）

二次正方行列 A の成分が

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

であるとき，もし $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ ならば

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

は $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$ を満たす．

言葉で書くと，二次の逆行列は

- 左上と右下を入れ替える
- 右上と左下を -1 倍する
- （左上）×（右下）−（右上）×（左下）で割る

として得られる[余談3.8]．

例題 3.5

連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 = 7 \end{cases}$$

を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の形で表し，係数行列 A の逆行列を両辺に左からかけることで解を求めよ．

解答　この方程式は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

と置けば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表される．このとき，

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

なので，方程式の解は

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 24 - 21 \\ -20 + 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

つまり $x_1 = -1, x_2 = 2$ である． ■

注意　連立一次方程式を解いたとき，答えが正しいかどうかは元の方程式に解を代入すればわかるので，試験で時間が余ったら必ず確認しよう．上の例題の場合，$x_1 = -1, x_2 = 2$ を元の方程式に代入して

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = -2 + 6 = 4,$$
$$5 \cdot (-1) + 6 \cdot 2 = -5 + 12 = 7$$

で確かに正しい．

≫ **三次以上の逆行列**　例えば，三次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

があるとき，その逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2} & -a_{1,2}a_{3,3} + a_{1,3}a_{3,2} & a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,2} \\ -a_{2,1}a_{3,3} + a_{2,3}a_{3,1} & a_{1,1}a_{3,3} - a_{1,3}a_{3,1} & -a_{1,1}a_{2,3} + a_{1,3}a_{2,1} \\ a_{2,1}a_{3,2} - a_{2,2}a_{3,1} & -a_{1,1}a_{3,2} + a_{1,2}a_{3,1} & a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |A| = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}, \end{aligned}$$

となる（二次の場合の真似をして導出してみよ．自力でできる者は基礎的な計算力があると評価してよいだろう）．これを教員が黒板に何も見ずにすらすら書き出すと「驚異の記憶力！！」とびっくりするかもしれないが，そんなわけはなくてちゃんと規則性がある．各成分がなんとなく二次の行列式っぽいと思えばその通りで，行列の一部の行列式（**余因子** (cofactor) という）が成分として現れ，それを三次の行列式 $|A|$ で割ったものになる．一般に n 次正方行列の逆行列の成分は $n-1$ 次の行列式を n 次の行列式で割ったものになり，n 次の行列式は項数が $n!$ 個になるので，公式として与えられるとはいっても計算はとても大変である．そのようなわけで，これらの結果は理論的には重要であるが，実用上は次回扱う掃き出し法を使うことになる．

二次の場合には $A^{-1}A = I_2$ ならば $AA^{-1} = I_2$ であることを示したが，一般に n 次正方行列 A に対して，ある n 次正方行列 X, Y があって $XA = I_n$ かつ $AY = I_n$ が成り立つならば，$XA = I_n$ の両辺に右か

ら Y をかければ $XAY = Y$，そして $AY = I_n$ なので $X = Y$ を得る．つまり，左からかけて I_n になる行列と右からかけて I_n になる行列があれば，両者は必ず一致しなければならない[余談3.9]．結論として，$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$，つまり**逆行列は元の行列と可換**であることが言える（対角化が使えると幾何的にも理解できる）．

3.3　第 3 回の余談

3.1 ベクトルも行列と思えば，わざわざ二回重ねて行列・行列積と言わずとも単に行列積でよいのだが，コンピュータでできる限り高速な計算を目指すハイパフォーマンスコンピューティング (HPC) 業界では行列・ベクトル積と行列・行列積ははっきり異なる演算として区別される（具体的にはデータの再利用性が違うため，高速化のためにはプログラムも変わってくる）．筆者がちょっとだけこの業界に染まっているため行列・行列積と書いてしまっているが，繰り返し何度も書くとちょっとうるさい気もしている．

3.2 行列・行列積の定義を導く議論の最後の段階で，慎重な者は二つの行列 M_1, M_2 があるときに $M_1\boldsymbol{x} = M_2\boldsymbol{x}$ ならば $M_1 = M_2$ かどうかが気になるだろう．これを言わなければ，$A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ を満たす AB が他にもある可能性を排除できない．$M_1\boldsymbol{x} = M_2\boldsymbol{x}$ は $(M_1 - M_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$（$\mathbf{0}$ は全ての成分が 0 のベクトル）と同値だが，**任意の $\boldsymbol{x}$ に対して**これが成り立つためには $M_1 - M_2 = O$（O は全ての成分が 0 の行列）でなければならない（なぜか？）．こうして $M_1 = M_2$ が言える．

3.3 このテキストではベクトルは主に縦ベクトルを用いているが，文献によっては $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の代わりに横ベクトルを用いて $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ を専ら用いている場合がある（横ベクトルを表すために転置記号をつけているが，常に横ベクトルを使うと約束すれば不要）．筆者はこれまでに深層学習の本とマルコフ連鎖の本でそのような流儀を見たことがある．コンピュータへの応用が念頭にある分野では，プログラムを書くときに縦ベクトルを記述するのが面倒なので，横ベクトルを用いると便利な場合が多いのかもしれない．

3.4 実数の積が可換なのは長方形の面積を表すから．では複素数の積も可換であったが，なぜなのか自分で幾何的に説明できるだろうか？

3.5 連立一次方程式のことは忘れて，$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対して $XA = I_n$ となるような $X \in \mathbf{R}^{n\times m}$ があるかという問題を考えることはできるだろう．例えば A の成分が全て 0 の場合を考えればそのようなものは必ずしも存在しないということがすぐにわかるのだが，正方行列の逆行列や，長方行列 A に対して $XA = I_n$ となるような X といったものを含む概念として一般逆行列とよばれるものが知られている．一般化のやり方は複数ありえるが，有名なのはムーア・ペンローズ逆行列であり，全ての行列に対してそれぞれただ一つ存在することが知られている．応用としては最小二乗法が有名である．

3.6 連立一次方程式の代入法が加減法と等価であることの説明：例えば方程式 (3.7a) で「第 2 式を変形すると $x_{1,2} = -x_{1,1}a_{1,2}/a_{2,2}$ となるから，これを第 1 式に代入して $x_{1,1}(a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1}/a_{2,2}) = 1$」というのは，「第 2 式を $a_{2,1}/a_{2,2}$ 倍すると $x_{1,1}a_{1,2}a_{2,1}/a_{2,2} + x_{1,2}a_{2,1} = 0$ だから，この両辺を -1 倍したものを第 1 式に加えて $x_{1,1}(a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1}/a_{2,2}) = 1$」と同じことである．

3.7 二次の逆行列の導出で「$a_{1,1}$ で割れば」とあるところで $a_{1,1} \neq 0$ でなくてよいのかと気づいた者がいればその通りで，本当は場合分けが必要である．そもそも最初の「第 1 式に $a_{1,2}$ を，第 2 式に $a_{1,1}$ をそれぞれかけると」の時点でどちらかが 0 だと破綻している．次回扱う掃き出し法をプログラミングする際には 0 の乗算・除算に注意しなければならない．しかし，$a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$ でさえあればいずれにせよ定理 3.3 の結果になるということが結論できる．

3.8 たまに左と右がどちらがどちらかわからない人がいるらしいのだが，あなたは大丈夫だろうか（左右盲というらしい）．こんなことを書いているのは，筆者の身近にもそういう人がいたからである．国語辞典でも左と右をどう定義するかは腕の見せ所．

ところで，二乗して -1 になる数を虚数単位 i と定めるが，このとき $-i$ も二乗すると -1 になる．よって $-i$ を i としても問題ないが，そうすると元々 i だと思っていたものは $-i$ だったということになる．こうしてどちらがどちらかわからなくなった……．

3.9 $XA = I_n$ と $AY = I_n$ から $X = Y$ を導くこの論法は，行列の特徴である成分と行列・行列積の定義を全く使っていない点が面白く，より一般に非可換な積が定義され単位元が存在する代数系に通用する．

なお，ここでは左逆行列 X と右逆行列 Y があれば両者は等しいということを言っているが，片方が存在するときにもう片方が存在するということは言っていない．この問題に対しては，線形代数の教科書では行列式を使って逆行列を具体的に構成してしまうのが通常だろう．行列式を使わずにこれを示すには，次のように考える．これは行列・ベクトル積を使っているので，一般の代数系に通用するものではない．

A には左逆行列 X が存在すると仮定し，$\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ として連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考え，$\boldsymbol{x}$ がその解になっているとしよう．（このあとで，もし $\boldsymbol{b}$ の選択によって解が存在しない場合があると困るが，その場合は付録 A の定理 A.7 より $A\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ なる非零ベクトル $\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbf{R}^n$ が存在することになる．しかし，左逆行列が存在すると仮定したので $XA\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$ となり，$\tilde{\boldsymbol{x}} \neq \mathbf{0}$ に矛盾する．）両辺に左から X をかけると $XA\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{b}$ となるが，$XA = I_n$ なので，$\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{b}$ を得る．これを元の連立一次方程式に代入すると $AX\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$，つまり $(AX - I_n)\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ ということになる．任意の $\boldsymbol{b}$ で成り立たなければならないので，これは $AX - I_n = O$，つまり $AX = I_n$ を意味する．よって，X は右逆行列でもある．

第 4 回　線形代数の準備 3：連立一次方程式の解法

連立一次方程式の解法である掃き出し法を説明する．これを用いて様々な連立一次方程式を解いてみると，解はただ一つに決まるとは限らないことに気づく．どのような条件でどのような解の表現が得られるかを調べるとともに，基本行列や逆行列を用いた掃き出し法の記述の仕方を述べる．

4.1　二次正方行列の場合

≫ **可逆な場合**　前回，二次の逆行列を導出したときに連立一次方程式を解いたが，同様にして例題 3.5 を解く過程を丁寧に見てみよう．

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 = 7. \end{cases}$$

第 1 式の両辺に $\frac{1}{2}$ をかけると，

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 = 2, \\ 5x_1 + 6x_2 = 7. \end{cases}$$

第 1 式の -5 倍を第 2 式に加えると，

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 = 2, \\ -\dfrac{3}{2}x_2 = -3. \end{cases}$$

第 2 式の両辺を $-\frac{2}{3}$ 倍すると，

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{2}x_2 = 2, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

第 2 式を $-\frac{3}{2}$ 倍して第 1 式に加えると，

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

こうして解 $x_1 = -1, x_2 = 2$ を得た．これらを行列・ベクトルで順に書いてみると次のようになる：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

これを見るとわかるように，計算で変わっていくのは係数行列と右辺ベクトルだけで，変数ベクトルは必要ない．また，「第 i 式を c 倍する」「第 i 式の c 倍を第 j 式に加える」というのは，行列の言葉ではそれぞれ「第 i 行を c 倍する」「第 i 行の c 倍を第 j 行に加える」のように，単に「式」を「行」に置き換えれば対応することがわかる．よって，連立一次方程式を解くことは，次のように係数行列と右辺ベクトルを並べた**拡大係数行列** (augmented coefficient matrix) を変形すること

に帰着される：

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行を } \frac{1}{2} \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行の } -5 \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } -\frac{2}{3} \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 2 行の } -\frac{3}{2} \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

このように，拡大係数行列には係数行列部分と右辺ベクトル部分の間に縦線を入れて区別しやすくすることが多い．この変形で順に得られる拡大係数行列はそれぞれ**行列として等しいわけではないので，絶対に等号では結ばないこと！**ここでは矢印で結び，その上にはどのように変形したのか説明書きを加えている．この説明書きは慣れれば必要ないが，後から見直してどう変形したのかわからなくなるうちは書いた方がよいだろう．

係数行列が可逆な n 次正方行列の場合に一般化しておこう．$A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は可逆, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ として，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考えよう．これに対して拡大係数行列 $\left(\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right)$ を作り，

- ある行を何倍かする（0 倍を除く）
- ある行の何倍かを別の行に加える

という二種類の**行基本変形** (elementary row operations) を繰り返し[余談4.1]，$\left(\begin{array}{c|c} I_n & \tilde{\boldsymbol{b}} \end{array}\right)$ に変形できれば，変形後の方程式が $I_n\boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ になったということなので，$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ を方程式の解として得る．この方法を**掃き出し法** (row reduction)，または**ガウスの消去法** (Gaussian elimination) という[余談4.2]．

注意　$\tilde{\boldsymbol{b}}$ の $\boldsymbol{b}$ の上についている波線は**チルダ** (tilde) という．これは元の $\boldsymbol{b}$ と異なるものであることを示すため，区別するために用いる．他に $\hat{\boldsymbol{b}}$ のように**ハット** (hat) や，$\boldsymbol{b}'$ のように**プライム** (prime) も同様の用途で用いることがある[余談4.3]．

≫ **可逆でない場合**　A が可逆でなければ，掃き出し法で係数行列部分を単位行列にはできない．例えば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

は行列式が $1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$ なので可逆でないが，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ として，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列を行基本変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & b_2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行の }-2\text{ 倍を}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \end{array}\right)$$

のように，係数行列部分の第 2 行が全て 0 になってしまって，単位行列が作れない．何が起きているかというと，もし $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ が

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b_1 \tag{4.2}$$

を満たせば，

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2b_1$$

となる．したがって，もし $b_2 = 2b_1$，つまり $b_2 - 2b_1 = 0$ ならば式 (4.2) さえ満たせば方程式の解であり，もし $b_2 \neq 2b_1$ ならば解は存在しない

ことがわかる．解が存在するときは $x_1 + 2x_2 = b_1$ を満たす (x_1, x_2) の組，つまり直線 $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{b_1}{2}$ 上の点は全て解で，$(x_1, x_2) = (b_1-2, 1)$, $(b_1 + 1, -1/2)$, $(\pi, (b_1 - \pi)/2)$ など無限にある．このように，逆行列が存在しないことは解が一つに決まらないことに対応している．

一般に二次の行列式が 0 になること $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = 0$ は $a_{1,1} : a_{1,2} = a_{2,1} : a_{2,2}$ と同値であり，これは第 1 行と第 2 行が互いに定数倍の関係にあることを意味している．よって，片方の制約条件が満たされれば，もう片方の制約条件が満たされるかどうかも決まってしまう．

4.2　一般の場合

2 本の 4 変数連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases} \tag{4.3}$$

を考えてみよう．これに対しても拡大係数行列の行基本変形を考えると

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行を } \frac{1}{2} \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行の } -7 \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{15}{2} & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } -\frac{2}{5} \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 行に加える}]{\text{第 2 行の } -\frac{3}{2} \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

とできる．最後の拡大係数行列は

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \end{cases}$$

を意味している．1 列目と 2 列目を取り出して並べれば単位行列になっていることに注意せよ．これをベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

と書いておくと意味するところが見やすい．つまり，x_3 と x_4 を定めれば x_1 と x_2 も決まり，方程式 (4.3) の解が一つ与えられるという構図になっている．左辺に x_3, x_4 がないのが気になれば，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書いてもよい．例えば，$x_3 = 0, x_4 = 0$ とすれば $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3, 4, 0, 0)$, $x_3 = 1, x_4 = 2$ とすれば $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -4, 1, 2)$ などなど，無限に解が得られる（元の方程式 (4.3) に代入して解であることを確認せよ）．

ところで，最後に得られた拡大係数行列からさらに

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第 1 行を } -\frac{1}{2} \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 1 行の } -3 \text{ 倍を}} \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

と変形すると，今度は 4 列目と 2 列目を並べれば単位行列となっており，

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

という，x_1 と x_3 を与えれば x_4 と x_2 も決まるという表現を得る．見た目は異なるが，これは先ほどの解の表現と同じ解を与えている．実際，$x_1 = -3, x_3 = 0$ とすれば $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3, 4, 0, 0), x_1 = 2, x_3 = 1$ とすれば $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, -4, 1, 2)$ が得られる．

以降の記述を簡潔にするために，**ピボット** (pivot) 操作という概念を導入する[余談4.4]．行列 A において，(i, j) 成分が 0 でないとき，(i, j) をピボットとして行基本変形するとは，次の二つの操作を続けて行うことをいう：

(1) 第 i 行を (i, j) 成分の値で割る

(2) 第 i 行以外の各行（第 k 行とする）すべてに対して，次を行う：
　第 i 行に (k, j) 成分をかけてできた行ベクトルを第 k 行から引く

(i, j) をピボットとして行基本変形すると，変形後の第 j 列はその第 i 成分だけが 1 で，他の成分は全て 0 となる．これを用いると，先の方程式 (4.3) の拡大係数行列に対する行基本変形は次のように簡潔に書ける（以降，このテキストでは次の変形でピボットに選ぶ成分に色を塗る．もちろん，普段の計算では塗らなくてよい）：

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & \boxed{-\frac{5}{2}} & -5 & -\frac{15}{2} & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,4)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

今後，特に細かく書く必要がなければこのようにピボットを用いて変形を記述していく．

例題 4.1

次の連立一次方程式の解を求めよ：

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 20, \\ -6x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 12, \\ -6x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -28. \end{cases}$$

解答　拡大係数行列を行基本変形すると，

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 9 & 3 & 20 \\ -6 & 8 & 6 & -4 & 12 \\ -6 & -2 & 1 & 3 & -28 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 10 \\ 0 & 2 & 33 & 5 & 72 \\ 0 & -8 & 28 & 12 & 32 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 21 & 4 & 46 \\ 0 & 1 & \frac{33}{2} & \frac{5}{2} & 36 \\ 0 & 0 & 160 & 32 & 320 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 2 \end{array}\right)$$

とできるので，解は x_4 を任意パラメータとして

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

で決まる (x_1, x_2, x_3, x_4) の組である．つまり，$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{1}{5}x_4 + 4, \frac{4}{5}x_4 + 3, -\frac{1}{5}x_4 + 2, x_4)$ である． ■

二つの例の観察から，$m \leq n$ として，m 本の n 変数連立一次方程式があるとき，もし全ての行について相異なる列からピボットを選んで行基本変形ができれば，一つの成分だけが 1 で他の成分は全て 0 の列が m 本できるので，ピボットに選ばなかった列に対応する $n - m$ 個の変数を任意パラメータとする解が得られることがわかる．ちゃんと書くと次の定理のようになる．

定理 4.1（掃き出し法）

m, n はともに正整数で，$m \leq n$ であるとする．$A \in \mathbf{R}^{m \times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ を用いて表される連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ である．その拡大係数行列 $\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)$ に対して，$j_1, j_2, \dots, j_m$ を相異なる 1 以上 n 以下の整数として $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, $\dots$, (m, j_m) をピボットとする行基本変形を適当な順に行い，結果 $\left(\tilde{A} \mid \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$ が得られたと仮定する．このとき，$\tilde{A}$ が $\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \dots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n \in \mathbf{R}^m$ を用いて $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2 & \dots & \tilde{\boldsymbol{a}}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトル表示されるならば，$\begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_{j_1} & \tilde{\boldsymbol{a}}_{j_2} & \dots & \tilde{\boldsymbol{a}}_{j_m} \end{pmatrix} = I_m$ であり，$k_1, k_2, \dots, k_{n-m}$ を $1, 2, \dots, n$ から $j_1, j_2, \dots, j_m$ を除いて得られる整数

列として，連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n-m}}$ を任意パラメータとして

$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} = -x_{k_1}\tilde{\boldsymbol{a}}_{k_1} - x_{k_2}\tilde{\boldsymbol{a}}_{k_2} - \cdots - x_{k_{n-m}}\tilde{\boldsymbol{a}}_{k_{n-m}} + \tilde{\boldsymbol{b}}$$

で $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ を決めることで与えられる．したがって，$m < n$ のときは無限個の解が存在し，$n = m$ のときは任意パラメータの数は 0 個で解はただ一つに決まる．

これはちゃんと式で一般的な状況を表したというだけなので，具体的な計算法は例題を通じて手順を理解しておけば十分である．なお，既に見たように，(i, j) をピボットとする行基本変形をしてから（他の行基本変形も経て）後に (i, j') をピボットとする行基本変形をした場合，先にした (i, j) をピボットとする行基本変形はしなかったのと同じことになる．

定理 4.1 では拡大係数行列の全ての行について相異なる列からピボットを選んで行基本変形できると仮定していた．しかし，実際には (4.1) の行列のように，途中である行の全ての成分が 0 になってしまい，ピボットが選べないという状況も起こりえる．このような状況も含めた一般論は付録 A で詳しく説明するが，議論が少し面倒になるため，このテキストでは以降はこのようなことが起こらない問題のみを扱うことにする．

4.3　基本行列と逆行列

拡大係数行列を行ベクトル表示すると，式 (3.6) を用いれば行基本変形を行列・行列積を用いて表現できることに気づく．実際，$m \times n$ 行列の第 i 行を c 倍するという操作は，m 次単位行列の (i, i) 成分を c で置き換えた行列を左からかけることで表せる：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_{i+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1}^{\mathrm{T}} \\ c\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_{i+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

ここで，何も書いていない成分は 0 であるとする．同様に，$m \times n$ 行列の第 i 行を c 倍した結果を第 j 行に加えるという操作は，m 次単位行列の (j, i) 成分を c で置き換えた行列を左からかけることで表せる：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & & \overset{i}{\smile} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & c & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{j-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_{j+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{j-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_j^{\mathrm{T}} + c\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_{j+1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

このように，左からかけると行基本変形を引き起こす正方行列を**基本行列** (elementary matrix) という．

具体的に方程式 (4.3) に対する行基本変形で見てみると，

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{15}{2} & -10 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{15}{2} & -10 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

となる．ところで，この結果は一つの式でまとめて書いてしまえば

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

ということだが，この四つの基本行列の積を計算してみると

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

である．一方，最終的に拡大係数行列の第 1 列，第 2 列が単位行列になったが，元の第 1 列，第 2 列を並べた行列の逆行列は，定理 3.3 より

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 8 - 3 \cdot 7}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

であり，基本行列の積と一致する．

さらに $(1,4)$ をピボットとする行基本変形を実行すると

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

となるが，この二つの基本行列をさらにかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

であり，これは元の拡大係数行列の第 4 列と第 2 列を並べた行列の逆行列と一致する：

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 8 - 3 \cdot 10}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

このように，掃き出し法で行列の一部分を単位行列にするということは，その一部分を取り出してできる正方行列の逆行列を左からかけることと同じである[余談4.5]．このことを踏まえると，定理 4.1 をより詳しく次のように述べることができる．

定理 4.2（連立一次方程式の解の逆行列による表示）

m, n はともに正整数で，$m \leq n$ であるとする．$A \in \mathbf{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ を用いて表される連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．ただし，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，および $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m$ を用いて $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ である．その拡大係数行列 $\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)$ に対して，$j_1, j_2, \dots, j_m$ を相異なる 1 以上 n 以下の整数として

$(1, j_1)$, $(2, j_2)$, …, (m, j_m) をピボットとする行基本変形を適当な順に行い，結果 $\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$ が得られたと仮定する．このとき，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{j_1} & \boldsymbol{a}_{j_2} & \dots & \boldsymbol{a}_{j_m} \end{pmatrix}$ と置けば，P は可逆であって

$$\left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right) = P^{-1}\left(A \,\middle|\, \boldsymbol{b}\right) = \left(P^{-1}A \,\middle|\, P^{-1}\boldsymbol{b}\right)$$

が成り立つ．したがって，$k_1, k_2, \dots, k_{n-m}$ を $1, 2, \dots, n$ から $j_1, j_2, \dots, j_m$ を除いて得られる整数列とするならば，連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{n-m}}$ を任意パラメータとして

$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} = -x_{k_1}P^{-1}\boldsymbol{a}_{k_1} - x_{k_2}P^{-1}\boldsymbol{a}_{k_2} - \cdots - x_{k_{n-m}}P^{-1}\boldsymbol{a}_{k_{n-m}} + P^{-1}\boldsymbol{b}$$

で $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ を決めることで与えられる．

証明　定理の主張内で述べた掃き出し法を実現する行列を $F \in \mathbf{R}^{m\times m}$ としよう．つまり

$$F\left(A \,\middle|\, \boldsymbol{b}\right) = \left(\tilde{A} \,\middle|\, \tilde{\boldsymbol{b}}\right)$$

である．行列・行列積の定義 (3.3) より

$$F\left(A \,\middle|\, \boldsymbol{b}\right) = \left(FA \,\middle|\, F\boldsymbol{b}\right)$$

であり，特にピボット選択の仮定より，$\tilde{A}$ の第 j_1 列，第 j_2 列，…，第 j_m 列のみに着目してみると

$$FP = F\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{j_1} & \boldsymbol{a}_{j_2} & \dots & \boldsymbol{a}_{j_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\boldsymbol{a}_{j_1} & F\boldsymbol{a}_{j_2} & \dots & F\boldsymbol{a}_{j_m} \end{pmatrix} = I_m$$

である．これを満たすためには $\boldsymbol{P}$ が可逆で $F = \boldsymbol{P}^{-1}$ でなければならない．このとき，$\tilde{A} = \boldsymbol{P}^{-1}A$，つまり定理 4.1 の $\tilde{\boldsymbol{a}}_{k_i} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{a}_{k_i}$ がわかる．こうして，最後の解の表示を得る．■

特に最後の解の表示についてコメントしておくと，この解の表示自体は掃き出し法を経ずに直接導くことも可能である．連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ は行列・ベクトル積の列ベクトル表示 (2.9) より

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

とも書けるので，$k_1, k_2, \ldots, k_{n-m}$ 項目を右辺に移項すれば

$$x_{j_1}\boldsymbol{a}_{j_1} + x_{j_2}\boldsymbol{a}_{j_2} + \cdots + x_{j_m}\boldsymbol{a}_{j_m} = -x_{k_1}\boldsymbol{a}_{k_1} - x_{k_2}\boldsymbol{a}_{k_2} - \cdots - x_{k_{n-m}}\boldsymbol{a}_{k_{n-m}} + \boldsymbol{b}.$$

と同値である．ここで左辺を行列・ベクトル積による書き方に戻すと

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{j_1} & \boldsymbol{a}_{j_2} & \ldots & \boldsymbol{a}_{j_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} = -x_{k_1}\boldsymbol{a}_{k_1} - x_{k_2}\boldsymbol{a}_{k_2} - \cdots - x_{k_{n-m}}\boldsymbol{a}_{k_{n-m}} + \boldsymbol{b}$$

なので，左辺の係数行列が可逆ならば逆行列を両辺に左からかければ定理の最後の解の表示を得る．

次回以降の線形計画法の説明では，このように掃き出し法の結果を表すために逆行列が式に現れることがある．逆行列が書かれているからといって逆行列を求めなければならないというわけではなく，実際の計算は掃き出し法で行うということに注意してほしい．

4.4　第 4 回の余談

4.1 通常，行基本変形というとさらに「二つの行を入れ替える」という操作も許容するが，これは単に式の順番を入れ替えるだけの操作であり，連立一次方程式を解くにはなくても問題ない．階段行列や三角行列とよばれるものに変形したい場合はこの操作が必要になる．通常の線形代数の教科書には載っているだろう．

4.2 ガウスの消去法で知られる Carl Friedrich Gauss (1777–1855) は 19 世紀ドイツの数学者で，7 歳の頃に $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = 5050$ を一瞬で計算した（これは真実かどうか不明なのだが，等差数列の和公式の導入でよく用いられる逸話），15 歳で素数定理を予想した，19 歳で平方剰余の相互法則や正十七角形が定規とコンパスで作図可能なことを証明したなど，神童ぶりが伝説として伝えられる数学者である．本格的に数学者となってからの業績も数論を筆頭に代数・解析・幾何のあらゆる分野におよび，複素平面の考案や代数学の基本定理（一次以上の任意の代数方程式には複素根が存在する）の証明など高校生でも知っているような基本的で重要な結果もある．歴史上の数学者から偉大な順にベストスリーを選べと言われれば多くの場合にランクインするであろう．

数学の定理や概念には数学者の名前がつけられることがよくあるのだが，多くの場合はその発見者や考案者の名前が冠されるのに対し，連立一次方程式に対する消去法を体系化したのはガウスより早く 17 世紀イギリスのニュートンやフランスのロルといった人々で，ガウスが生きた 19 世紀の教科書には消去法が既に載っていた．当のガウスがやったことは，準惑星ケレスの軌道を求めるための最小二乗問題を解く方法として，正規方程式という連立一次方程式を書き下し消去法を効率的に適用するための記法を考案したことであった．ガウスの業績はあくまでもこの記法が当時の天文学の計算をする人々に広く受け入れられたということなのだが，20 世紀になってコンピュータ時代を迎え，様々な問題を巨大な連立一次方程式に帰着して解くようになると，消去法は科学技術計算において重要な位置を占めるようになり，アメリカ数学会の講演で「高校数学の消去法はガウスによって与えられた」「ガウスの消去法」と誤って説明する者が現れると，ガウスの偉大さへの絶大な信頼もあってこの呼称が短期間で広まってしまったということのようである．

J. F. Grcar, *Mathematicians of Gaussian elimination*, Notices of AMS, **58** (2011) 782–792, `http://www.ams.org/notices/201106/rtx110600782p.pdf`

G. E. Forsythe, *Solving linear algebraic equations can be interesting*, Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953) 299–329, `https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1953-09718-X`

を参照．このように，なんらかの理由で本来の発明者とは違う人物の名前がついている定理や概念もあり，カルダノの公式，ロピタルの定理，グレブナー基底などが有名である．

4.3 プライム $'$ は高校まではダッシュと読んだであろうが，現代の英語ではプライムと読むのが通常である．二通りの読み方の歴史については，

田野村忠温，ダッシュ，プライム，数学セミナー 2018 年 8 月号，54–58.

田野村忠温，a' の英語における読みの歴史に関する覚書，

`http://www.tanomura.com/intro/dash2.html`

に詳しい．

4.4 ピボットとは旋回軸や支点のことで，この成分を中心として行基本変形するという意味である．バスケットボールにおけるピボットを知っていればイメージしやすいだろう．ピボットには派生して要点という意味もあり，表計算ソフトウェア Excel でクロス集計表を作る機能であるピボットテーブルはこちらの意味のようだ．

4.5 この結果は興味深くて，ここから可逆な正方行列はいくつかの基本行列の積で書ける，言い換えると基本行列の積に分解できるということが言える．このように，基本行列は積で行列を組み立てる際の基本的なパーツ（一般線形群の生成元）となっている．

どの順番で基本変形をしても逆行列が得られるのは不思議に思うかもしれないが，これは逆行列の一意性のため，つまり n 次正方行列 A に対してその逆行列は存在するならば一つしかないためである．実際，もし X と Y がどちらも A の逆行列であれば，$XA = AX = I_n, YA = AY = I_n$ であるが，このとき $X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_nY = Y$ となり，X と Y は等しくなければならないことが導かれる．このことと行列・行列積の定義 (3.3) を合わせて考えると，ピボットに選んだ列を並べた正方行列が単位行列になるということは，その元々の正方行列の逆行列をかけたということに他ならず，逆行列の一意性から順番は関係なく選んだ列のみに依存するということがわかる．ここで述べた，一意性の証明に「条件を満たすものが二つあると仮定して両者が一致することを示す」のは現代数学の常套手段，証明の型の一つである．

第 5 回　線形計画問題の標準形

今回から線形計画法の本論に入る．まず線形計画問題の定義を改めて述べ，どのような線形計画問題であっても標準形とよばれる線形計画問題に変換できることを示す．標準形を導入する意義は，その標準形に対してのみ解法を考えれば全ての問題が解けるようになり，問題によって解法を変える必要がなくなることである．

5.1　線形計画問題の定義と標準形

ようやく線形計画問題について述べることができる．ここまでに学んだことを総動員するので，わからなくなったら適宜戻ること．

数理計画問題のうち，目的関数と制約条件が全て一次式で表される問題を線形計画問題という．一般には

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化（もしくは最小化）} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{条件} & A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1 \\
 & A_2\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_2 \\
 & A_3\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}_3
\end{array}
$$

の形で表される．ただし，$A_i \in \mathbf{R}^{m_i \times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbf{R}^{m_i}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ である．問題の目標は，この全ての制約条件を同時に満たしながら，目的関数 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ を最大化（もしくは最小化）する変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ を探すことである．

この一般的な形では，制約条件に等式，左辺の方が小さい不等式，左辺の方が大きい不等式の三種類が現れている[余談5.1]．この先の話では，次の**標準形** (standard form) とよばれる線形計画問題のみを扱うこ

となる[余談5.2]：

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{条件} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，$A \in \mathbf{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ である．また，$\boldsymbol{0}$ は左辺と同じ次元で成分が全て 0 のベクトルを表す（以降同様）．$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を非負制約という．

5.2　標準形への変換

「標準形とよばれる線形計画問題のみを扱うことになる」と書いたものの，では標準形以外の問題は扱わないのだろうか．「標準」という名前の通り，実はどんな問題も次の手順で標準形に書き直すことができる．

» **最小化を最大化に変換する**　$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ を最小化するということは，$-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ を最大化することと同じである．つまり，目的関数を -1 倍するだけで，最小化問題を最大化問題に変換することができる．ただし，この変換をすると当然最終的に得られる目的関数の値も -1 倍されるので，元の問題での目的関数の値を得るためにはさらに -1 倍して元に戻す必要がある．

» **不等式制約を等式制約に変換する**　例えば $ax \leq b$ という不等式制約があったとしよう．左辺を右辺に移項すれば $b - ax \geq 0$ となるので，$s = b-ax$ と置けば，$ax+s = b$ かつ $s \geq 0$ である．つまり，不等式制約 $ax \leq b$ は，新たな変数 s を導入すれば $ax+s = b$ かつ $s \geq 0$ に書き直せるということになる．この s を**スラック変数** (slack variable) とい

う[余談5.3]．スラック変数は，その作り方から自動的に非負制約がつく．

不等号の向きが逆で $ax \geq b$ の場合も，同様に考えれば $ax - s = b$, $s \geq 0$ と同値であることがわかる．

この変換を全ての不等式制約に適用することで，全ての制約条件が等式制約の問題に変換される．

≫ **非負制約を付加する**　もし非負制約ではなく非正制約 $x \leq 0$ がついている変数があれば，問題中に出てくる x を全て新たな変数 $x^- = -x$ で置き換えれば $x^- \geq 0$ と非負制約に書き換えられる．

もし非負制約も非正制約もついておらず，正の値も負の値も自由にとれる変数 x があれば，非負制約を満たす新たな変数 $x^+ \geq 0$ と $x^- \geq 0$ を導入して，問題中に出てくる x を全て $x^+ - x^-$ で置き換える．こうすると，$x \geq 0$ のときは $x^+ = x, x^- = 0$，$x < 0$ のときは $x^+ = 0$, $x^- = -x$ とすれば元の状況を再現し，変数が一つ増える代わりに非負制約がつけられる[余談5.4]．

例題 5.1

次の線形計画問題を標準形に変換せよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 2x_1 - 5x_2 \\
\text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
 & 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

解答　最小化を最大化に変更し，スラック変数 s_1, s_2, s_3 を導入して不等式制約を等式制約に変更することで

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & -2x_1 + 5x_2 \\
\text{条件}\quad & 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\
& 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 9 \\
& 2x_1 + x_2 - s_3 = 2 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

を標準形として得る．■

例題 5.2

次の線形計画問題を標準形に変換せよ．

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & -4x_1 + 2x_2 - 7x_3 \\
\text{条件}\quad & 5x_1 + 2x_3 = 10 \\
& x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 8 \\
& x_1, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

解答　スラック変数 s を導入して不等式制約を等式制約に変更し，非負変数 x_2^+, x_2^- を導入して $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ と置くことで

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & -4x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- - 7x_3 \\
\text{条件} \quad & 5x_1 + 2x_3 = 10 \\
& x_1 + 3x_2^+ - 3x_2^- + 4x_3 + s = 8 \\
& x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, s \geq 0
\end{aligned}
$$

を標準形として得る． ■

5.3　図による領域の表示と標準形の関係

制約条件が満たす領域を図示することは，問題を幾何的に理解するという観点からは重要である．実際には三変数以上になると描くのは困難になるが，二変数の場合でよいので一度描いておくと，三変数以上の場合をイメージするにも役に立つ．

例題 5.3

次の不等式を全て満たす領域を図示せよ．

$$
\begin{aligned}
& 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

解答　不等式は

$$
\begin{aligned}
& x_2 \leq -\frac{3}{2}x_1 + 3, \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

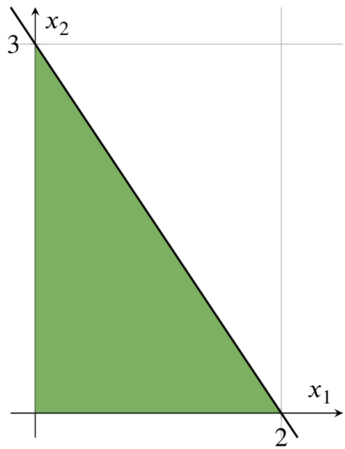


図 5.1 例題 5.3 の解答例.

と書き直せる．x_2（縦方向）が関数 $-\frac{3}{2}x_1+3$ の値以下（つまりグラフの下側），かつ x_1, x_2 がともに非負（x_1 軸の上側，x_2 軸の右側）なので，これらの共通部分を描くと図 5.1 のようになる． ■

例題 5.3 の不等式にスラック変数 s を導入すると

$$3x_1 + 2x_2 + s = 6, \tag{5.1}$$
$$x_1, x_2, s \geq 0$$

となる．この領域を図示すると図 5.2 のようになる．等式は自由度を一つ減らすので，三次元空間内では次元が一つ低い二次元の平面を与える．$x_1, x_2, s \geq 0$ から三角形の領域となるが，その頂点の座標は等式制約 (5.1) において三つの変数のうち二つを 0 にすることで得られる．つまり，

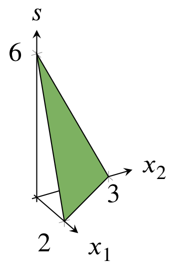


図 5.2　例題 5.3 の不等式にスラック変数を導入した場合.

- $x_2 = s = 0$ のとき $x_1 = 2$,
- $x_1 = s = 0$ のとき $x_2 = 3$,
- $x_1 = x_2 = 0$ のとき $s = 6$

である．スラック変数を無視すれば[余談5.5]，元の領域の三つの頂点 $(x_1, x_2) = (2, 0), (0, 3), (0, 0)$ が得られている．簡単だが，この観察はこの先を理解するうえで非常に重要となる．

例題 5.4

次の不等式を全て満たす領域を図示せよ．

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6,$$
$$6x_1 + 2x_2 \leq 9,$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

解答　不等式は

$$x_2 \leq -\frac{3}{2}x_1 + 3,$$
$$x_2 \leq -3x_1 + \frac{9}{2},$$

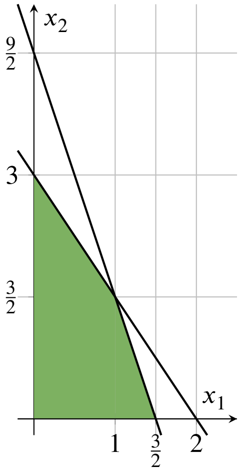


図 5.3　例題 5.4 の解答例.

$$x_1, x_2 \geq 0$$

と書き直せる．x_2（縦方向）が関数 $-\frac{3}{2}x_1 + 3$, $-3x_1 + \frac{9}{2}$ の値以下（つまりグラフの下側），かつ x_1, x_2 がともに非負（x_1 軸の上側，x_2 軸の右側）なので，これらの共通部分を描くと図 5.3 のようになる． ■

これもスラック変数 s_1, s_2 を導入すると

$$3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6, \tag{5.2}$$

$$6x_1 + 2x_2 + s_2 = 9, \tag{5.3}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

となる．例題 5.3 のときと同様に，二つの変数を 0 にすると頂点の座標が得られる．例えば，$x_1 = x_2 = 0$ とすれば $s_1 = 6$, $s_2 = 9$ である．

しかし，次に例えば $s_1 = s_2 = 0$ とすると

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 = 6,\\
&6x_1 + 2x_2 = 9,
\end{aligned}
$$

となって，連立一次方程式を解かなければ頂点の座標が求まらない．効率的に求めるためには掃き出し法を使う．等式制約 (5.2), (5.3) を連立一次方程式だと思って，拡大係数行列を変形する．

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,1)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)
$$

これは

$$
\begin{aligned}
&x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}s_1 = 2,\\
&-2x_2 - 2s_1 + s_2 = -3
\end{aligned}
$$

ということなので，$x_2 = s_1 = 0$ とすれば $x_1 = 2, s_2 = -3$ を得るが，s_2 の非負制約を満たさない．$(x_1, x_2) = (2, 0)$ なので，元の不等式で見れば二本目の制約 $6x_1 + 2x_2 \le 9$ を破っていることが $s_2 < 0$ に対応している．同様に変形を続けよう．

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)
$$

これは

$$
\begin{aligned}
&x_1 - \frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 = 1,\\
&x_2 + s_1 - \frac{1}{2}s_2 = \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

ということなので，$s_1 = s_2 = 0$ とすれば $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$ を得る．これが二本の直線の交点 $(x_1, x_2) = (1, \frac{3}{2})$ である．さらに，続けよう．

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

これで $x_2 = s_2 = 0$ とすれば $x_1 = \frac{3}{2}, s_1 = \frac{3}{2}$ を得る．

このように，全ての行について相異なる列からピボットを選べば，ピボットに選ばなかった列に対応する変数の値を 0 にすれば，右辺の値がそのままピボットに選んだ対応する変数の値になる．

ピボットの選び方は，四つの変数から二つを選ぶ組み合わせなので，全部で 6 通りある．全て列挙すると以下のようになる．

- $s_1 = s_2 = 0$ のとき，$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$.
- $x_2 = s_2 = 0$ のとき，$x_1 = \frac{3}{2}, s_1 = \frac{3}{2}$.
- $x_1 = s_2 = 0$ のとき，$x_2 = \frac{9}{2}, s_1 = -3$（非負制約を破る）.
- $x_2 = s_1 = 0$ のとき，$x_1 = 2, s_2 = -3$（非負制約を破る）.
- $x_1 = s_1 = 0$ のとき，$x_2 = 3, s_2 = 3$.
- $x_1 = x_2 = 0$ のとき，$s_1 = 6, s_2 = 9$.

それぞれが図 5.3 のどの点に対応するか確認すること．スラック変数を 0 にするということは，元の対応する不等式において等号が成立するという意味であることに注意.

例題 5.5

次の不等式を全て満たす領域を図示せよ．

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 \leq 6,\\
&6x_1 + 2x_2 \leq 9,\\
&2x_1 + x_2 \geq 2,\\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

解答　不等式は

$$
\begin{aligned}
&x_2 \leq -\frac{3}{2}x_1 + 3,\\
&x_2 \leq -3x_1 + \frac{9}{2},\\
&x_2 \geq -2x_1 + 2,\\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

と書き直せる．x_2（縦方向）が関数 $-\frac{3}{2}x_1 + 3$, $-3x_1 + \frac{9}{2}$ の値以下（つまりグラフの下側），$-2x_1 + 2$ の値以上（つまりグラフの上側），かつ x_1, x_2 がともに非負（x_1 軸の上側，x_2 軸の右側）なので，これらの共通部分を描くと図 5.4 のようになる． ■

これもスラック変数 s_1, s_2, s_3 を導入すると

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6,\\
&6x_1 + 2x_2 + s_2 = 9,\\
&2x_1 + x_2 - s_3 = 2,
\end{aligned}
$$

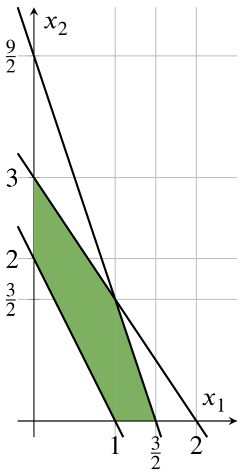


図 5.4　例題 5.5 の解答例.

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

となる．等式制約を拡大係数行列と思って変形すれば，例えば

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\ \text{をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

とできるので，$x_2 = s_3 = 0$ とすれば $x_1 = 1, s_1 = 3, s_2 = 3$ を得る．同様に繰り返せば，次の 10 個の頂点が得られる．

- $s_2 = s_3 = 0$ のとき，$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -3, s_1 = \frac{3}{2}$（非負制約を破る）.
- $s_1 = s_3 = 0$ のとき，$x_1 = -2, x_2 = 6, s_2 = 9$（非負制約を破る）.
- $x_2 = s_3 = 0$ のとき，$x_1 = 1, s_1 = 3, s_2 = 3$.
- $x_1 = s_3 = 0$ のとき，$x_2 = 2, s_1 = 2, s_2 = 5$.
- $s_1 = s_2 = 0$ のとき，$x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}, s_3 = \frac{3}{2}$.

- $x_2 = s_2 = 0$ のとき，$x_1 = \frac{3}{2}, s_1 = \frac{3}{2}, s_3 = 1$.
- $x_1 = s_2 = 0$ のとき，$x_2 = \frac{9}{2}, s_1 = -3, s_3 = \frac{5}{2}$（非負制約を破る）.
- $x_2 = s_1 = 0$ のとき，$x_1 = 2, s_2 = -3, s_3 = 2$（非負制約を破る）.
- $x_1 = s_1 = 0$ のとき，$x_2 = 3, s_2 = 3, s_3 = 1$.
- $x_1 = x_2 = 0$ のとき，$s_1 = 6, s_2 = 9, s_3 = -2$（非負制約を破る）.

こうして得られる不等式制約が表す領域の頂点が，実は線形計画問題の最適解を探す鍵であることを次回説明する.

5.4　第 5 回の余談

5.1 $\boldsymbol{Ax} < \boldsymbol{b}$ のように等号がついていない不等式は考えないのかと不思議に思うかもしれない．次回の説明を読むとわかるように，線形計画問題の最適解は必ず制約条件を満たす領域の境界部分にあるため，もし等号がついていない不等式制約があると最適解が存在しない可能性が出てくる．例えば $x < 5$ という制約条件のもとで x を最大化することを考えよう．このとき，$x = 4.99$ はさらに大きい解 $x = 4.999$ が存在するので最適解ではない．同様に，$x = 4.999$ はさらに大きい解 $x = 4.9999$ が存在するので最適解ではない．このように $x = 5$ に近づける操作をいくらでも繰り返すことができるが，$x = 5$ になった瞬間に $x < 5$ という制約条件を満たさなくなるので，$x = 5$ も最適解ではない．数式でちゃんと書くと，$4 + \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$ は n を大きくするといくらでも 5 に近づけられるが，$n \to \infty$ の極限をとった $4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 5$ は制約条件を満たさないという状況が起きている．このことを，x には最大値は存在しないが 5 が上限であると言い表す.

微分積分学（解析学）ではこれと同様に，n が有限である限りは条件を満たすが，$n \to \infty$ とすると条件を満たさないような状況を認識することが重要になる．例えば有理数列の極限は有理数とは限らないが，有理数列の極限としてとりえる数を考えることで無理数の概念が導入される（完備化という）.

5.2 文献によっては最大化ではなく最小化の方を標準形とすることがある．どちらにするかで後の話の符号がひっくり返るので，他の本を読むときは注意．物理学でポテンシャルの考え方を知っていれば最小化の方がしっくりくるのだが，最小化にするとシンプレックス法を適用するときにいちいちマイナスがついてきて少し鬱陶しい.

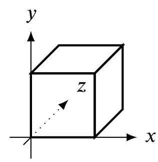
ここで述べた標準形は制約条件が全て等式であるのに対して，制約条件が全て不等式になっているものを不等式標準形とよぶことがある．不等式標準形については第 11 回で触れるが，このテキストでは標準形といったら等式の標準形の方を指すと約束する.

5.3 スラックというのはあの有名なビジネスチャットツールの Slack (`https://slack.com`) のことで，「余裕」という意味がある．Web サービスの Slack は「Slack がある生活は余裕がある」ということのように思われるが，公式には “Searchable Log of All Conversation and Knowledge” の頭文字をとった（アクロニム）ということになっている．おそらくアクロニムだというのは後付けだろう．話を戻すと，スラック変数とは元の不等式が等式からどれだけ離れているかの余裕分を表す変数という意味である．例えば $x \leq 5$ にスラック変数を導入して $x + s = 5$ とすると，$x = 3$ のとき $s = 2$ であって，$3 \leq 5$ において左辺は等号まで 2 だけ余裕があるということになる．

なお，slack の原義は “inclined to be lazy”（怠惰な傾向）で，そこから「たるんでいる」「いいかげん」「やる気がない」「不景気」といった意味が出てくる．実はあまり良くない意味が多い言葉のようである．

5.4 $x = x^+ - x^-$ と置き換えると，もちろん x と (x^+, x^-) は一対一対応しない．例えば $x = 5$ を表すには $x = 5 - 0$ の他に $x = 6 - 1, x = 13 - 8$ など，無数に (x^+, x^-) の組が存在する．これは元の問題で最適解が一つしかなくても，標準形へ変換後の問題では最適解が無数に存在しえることを意味するが，後に説明する解法を適用するうえで障害にはならない．

5.5 $\mathbf{R}^n$ の一部の座標を無視することを射影 (projection) という．例えば三次元空間の三つの座標のうち最後の一次元を落とす射影は行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を左からかけることで実現することができる．ちょうどこれは xy 平面に向けてまっすぐに光を当てて，できた影を見ることに相当する．なお，project は pro「前に」と ject「投げる」で，そこから「(未来に向かう）計画」と「発射する」「投影する」の意味が出るようだ．プロジェクタは投影する機械のこと．



「一部の座標を無視する」という定義だと座標の取り方に依存してしまう．一般に n 次正方行列 P が冪等律 $P^2 = P$ を満たすとき，P を射影行列という．絵を描くときには三次元空間の物体を二次元に落とさなければならず，遠近法，透視図法，投影図法といったものを用いるが，射影はこれらを一般化した概念になっている．例えば右図のように三次元空間の z 軸を x 軸から 45 度の方向に長さを $\frac{1}{2}$ 倍して描く「キャビネット図法」を表す射影行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる．

第 6 回　実行可能解と基底解

線形計画問題では目的関数と制約条件が全て一次式であることから，最適解が存在するならば制約条件が作る凸多面体の頂点にあることが示される．この頂点のことを基底解という．今回は基底解に関連する用語を定義するとともに，「最適解は存在するならば必ず基底解にある」という線形計画法の基本定理を述べる．

6.1　解の種類

≫ **実行可能解と最適解**　数理計画法において，単に**解** (solution) というとその決定変数 $\boldsymbol{x}$ に具体的な値を割り当てたもののことをいう．問題の解，つまり最大値をとる答えだと勘違いしがちだが，そうではなくてありうる解決策の一つのことである．

解はあくまでも提案し得る解決策の一つに過ぎないので，そもそも制約条件を満たしていない場合や，満たしていても最適ではない場合がある．解の中でも与えられた制約条件を全て満たすものを**実行可能解** (feasible solution) といい，実行可能解全体の集合を**実行可能領域** (feasible region) という．実行可能解の中で，目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ を最大（もしくは最小）にするようなものを**最適解** (optimal solution)，最適解における目的関数の値を**最適値** (optimal value) という．数理計画法の目的は最適解を効率的に探すことである．

≫ **基底解**　実行可能領域を描く練習は前回したので，これを用いて最適解について考察してみよう．

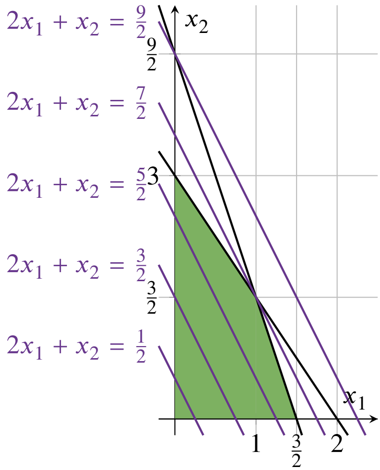


図 6.1　例題 6.1 を目的関数の値を動かして考える．

例題 6.1

次の線形計画問題の最適解と最適値を求めよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 2x_1 + x_2 \\
\text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

解答　実行可能領域は例題 5.4 で描いた．この図に目的関数の値を f と決めると引ける直線 $2x_1 + x_2 = z$ を追加してみよう．$x_2 = -2x_1 + z$ なので，z を 0 から少しずつ大きくしていくと図 6.1 のようになる．$2x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$ がちょうど $3x_1 + 2x_2 = 6$ と $6x_1 + 2x_2 = 9$ の交点

$(x_1, x_2) = (1, \frac{3}{2})$ を通るが，これより z を大きくすると実行可能領域を通らなくなる．つまり，目的関数の値を $\frac{7}{2}$ より大きくすると実行可能でないということなので，最適解は $(x_1, x_2) = (1, \frac{3}{2})$，最適値は $\frac{7}{2}$ であることがわかる．■

同じ制約条件で，目的関数を変えてみよう．

例題 6.2

次の線形計画問題の最適解と最適値を求めよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & x_1 + 2x_2 \\
\text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

解答　例題 6.1 と同様に目的関数の値を z と決めると引ける直線 $x_1 + 2x_2 = z$ を追加してみよう．$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}z$ なので，z を 0 から少しずつ大きくしていくと図 6.2 のようになる．$x_1 + 2x_2 = 6$ がちょうど $3x_1 + 2x_2 = 6$ と $x = 0$ の交点 $(x_1, x_2) = (0, 3)$ を通るが，これより z を大きくすると実行可能領域を通らなくなる．つまり，目的関数の値を 6 より大きくすると実行可能でないということなので，最適解は $(x_1, x_2) = (0, 3)$，最適値は 6 であることがわかる．■

どちらの例題でも，最適解は多角形である実行可能領域の頂点となっていることに着目しよう．特に線形計画問題では実行可能領域はへこみがない，つまり凸な多角形となる．よくよく考えてみれば，変

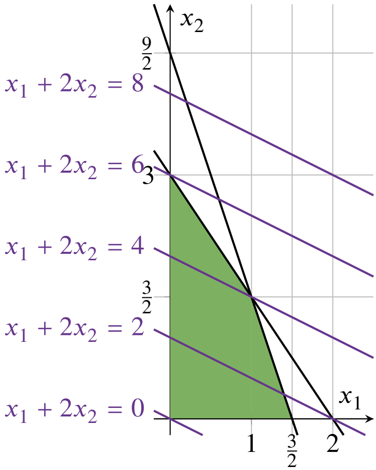


図 6.2　例題 6.2 を目的関数の値を動かして考える．

数が二つの場合，目的関数の値を固定するとそれは直線を与え，値を動かすと直線が動いていくのだから，最大値となるところでは，そこから少しでも値を大きくすれば実行可能領域を通らなくなる．したがって，目的関数が最大値をとるとき，対応する直線は実行可能領域の多角形の境界（頂点か辺）を通っていなければならない．辺を通るときも必ず頂点を通ることに注意すると，**線形計画問題では実行可能領域の頂点に必ず最適解がある**ということがわかる．前回の最後にひたすら領域の頂点の座標を求める計算をしたのはこれが理由である．線形計画問題以外では実行可能領域の境界に最適解が存在するとは限らないので（例題 1.1 参照），これが線形計画問題を特別視する理由となっている．

この考察を動機として，次の用語を導入する．$m \leq n$, $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ とし，制約条件が標準形 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ である線形計画

問題を考える．等式制約 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ のうち，その成分の少なくとも $n-m$ 個が 0 であるような解のことを**基底解** (basic solution)，基底解のうち非負制約 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ も満たすものを**実行可能基底解** (basic feasible solution) という．基底解は 0 にする $n-m$ 個の変数を決めれば一つ決まり，これら 0 にする変数を**非基底変数** (nonbasic variable)，非基底変数でない m 個の変数を**基底変数** (basic variable) という．要は基本変形でピボットに選んだ列に対応する変数が基底変数であり[余談6.1]，そのときの基底変数以外（非基底変数）を全て 0 にして得られるのが基底解である．前回見た通り，このようにして得られる基底解は実行可能領域の頂点となっているのであった．変数の数が増えるとイメージが難しくなるが，目的関数と制約条件がどちらも線形である限り，直線が平面や超平面[余談6.2]，凸多角形が凸多面体や超凸多面体に一般化されはするものの，話としては大きくは変わらない．

注意　非基底変数から先に定義しているのがしっくりしないと思われたかもしれないが，これは基底変数の値も 0 になる可能性があるためである．$n-m$ 個よりも多くの成分が 0 になっている基底解を**退化** (degenerate) しているという．退化した基底解がある場合に起こる現象については第 9 回で扱う．

6.2　線形計画法の基本定理

前節の考察はとても基本的であり，変数の数がいくつであっても，次のように「基本定理」として述べられる[余談6.3]．

定理 6.1（線形計画法の基本定理）

線形計画問題において次が成り立つ．

(1) 実行可能解が存在すれば，実行可能基底解が存在する．

(2) 最適解が存在すれば，最適解かつ基底解であるものが存在する．

この定理の証明には付録 A で説明する線形代数の知識が必要なので，その後の付録 B に回した．ここでは実際にこの定理を使って線形計画問題の最適解を求めてみよう．

例題 6.3

次の線形計画問題には最適解が存在する．その実行可能基底解を全て列挙し，最適解を求めよ．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

解答　スラック変数 s を導入すると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + s = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, s \geq 0 \end{array}$$

という標準形が得られる．基底解と目的関数の値を列挙すると

- $(x_1, x_2, x_3, s) = (3, 0, 0, 0)$，目的関数の値 9.
- $(x_1, x_2, x_3, s) = (0, 2, 0, 0)$，目的関数の値 4.
- $(x_1, x_2, x_3, s) = (0, 0, 1, 0)$，目的関数の値 5.
- $(x_1, x_2, x_3, s) = (0, 0, 0, 6)$，目的関数の値 0.

よって，元の問題の最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, 0)$，最適値は 9 である． ■

例題 6.4

次の線形計画問題には最適解が存在する．その実行可能基底解を全て列挙し，最適解を求めよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
\text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 6 \\
 & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

解答　スラック変数 s_1, s_2 を導入すると

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
\text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + s_1 = 6 \\
 & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

という標準形が得られる．基底解と目的関数の値を列挙すると

- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (\frac{3}{2}, 1, 0, 0, 0)$，目的関数の値 $\frac{13}{2}$.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (\frac{15}{8}, 0, \frac{3}{8}, 0, 0)$，目的関数の値 $\frac{15}{2}$.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 5, -\frac{3}{2}, 0, 0)$，非負制約を満たさない.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (2, 0, 0, 2, 0)$，目的関数の値 6.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 4, 0, -6, 0)$，非負制約を満たさない.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 0, 6, -30, 0)$，非負制約を満たさない.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (3, 0, 0, 0, -6)$，非負制約を満たさない.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 2, 0, 0, 6)$，目的関数の値 4.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 0, 1, 0, 10)$，目的関数の値 5.
- $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 0, 0, 6, 12)$，目的関数の値 0.

よって，元の問題の最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{15}{8}, 0, \frac{3}{8})$，最適値は $\frac{15}{2}$ である. ■

» **これで十分？** 線形計画法の基本定理のおかげで，どんなに大規模な線形計画問題であっても，最適解が存在する問題であればその基底解を全て調べれば最適解を求めることができる．しかし，現実にはちょっとした規模の問題でさえ，これではうまくいかない．なぜならば，変数が増えて実行可能領域の次元が高くなると，それに応じて基底解の数が爆発的に増えるからである．例えば $A \in \mathbf{R}^{20\times 40}$ の場合，たった 40 変数の問題であるにもかかわらず，基底解の個数は最大で ${}_{40}\mathrm{C}_{20} = \frac{40!}{(20!)^2} = 137846528820$ にもなり，コンピュータでもこんなにたくさんの基底解を全て調べるのは大変である．このため，実際には全ての基底解を調べるのではなく，基底解を目的関数の値が大きくなるよう順に効率良く辿っていく方法が用いられる．これが次回説明するシンプレックス法である．シンプレックス法を使えば，

$A \in \mathbf{R}^{20\times 40}$ の問題でもほとんどの場合は短時間で解くことができる．

6.3　最適解が存在しない場合

定理 6.1 (2) で「最適解が存在すれば」と書いたように，線形計画問題にはそもそも最適解が存在しない場合がある．それは，実行可能解が存在しない場合と，目的関数の値が上に有界でない場合である．

≫ **実行可能解が存在しない場合**　制約条件を満たす解がなければ，当然最適解も存在しない．

例題 6.5

次の線形計画問題の最適解と最適値を求めよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 2x_1 + x_2 \\
\text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & x_1 + x_2 \geq 4 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

解答　制約条件の表す領域を描いてみると図 6.3 のようになり，共通部分がないことがわかる．つまり，実行可能解が存在しないので，最適解も存在しない．■

≫ **目的関数の値が上に有界でない場合**　目的関数をいくらでも大きくできる場合も最適解は存在しない[余談6.4]．このような状況を**上に有界** (bounded above) でない (unbounded) という．

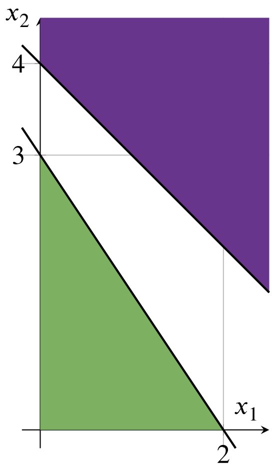


図 6.3　例題 6.5 の各制約条件．非負制約に加えて，緑色の領域が $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ を，紫色の領域が $x_1 + x_2 \geq 4$ をそれぞれ満たす．

例題 6.6

次の線形計画問題の最適解と最適値を求めよ．

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{条件} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & 6x_1 + 2x_2 \geq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

解答　t をパラメータとして $(x_1, x_2) = (t, t)$ という点を考えると，$t \geq \frac{6}{5}$ ならば制約条件を満たすことがわかる．このときの目的関数の値は $3t$ だから，t を大きくすればいくらでも大きくすることができる．つまり，この問題の目的関数は上に有界でなく，最適解は存在し

ない． ■

ところで，この問題の標準形は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & x_1 + 2x_2 \\
\text{条件} & 3x_1 + 2x_2 - s_1 = 6 \\
& 6x_1 + 2x_2 - s_2 = 9 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

であり，その基底解を列挙すると

- $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (1, \frac{3}{2}, 0, 0)$，目的関数の値 4.
- $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, 0)$，非負制約を満たさない.
- $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, \frac{9}{2}, 3, 0)$，目的関数の値 9.
- $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (2, 0, 0, 3)$，目的関数の値 2.
- $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 3, 0, -3)$，非負制約を満たさない.
- $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0 - 6, -9)$，非負制約を満たさない.

となって，これから最適解 $(x_1, x_2) = (0, \frac{9}{2})$，最適値 9 と答えたくなる．しかし，目的関数の値が上に有界でない場合は，基底解よりも大きな値をとる実行可能解が存在していて，基底解だけを調べているとこのことに気づかないことがある．次回のシンプレックス法で，上に有界でない場合の判定条件も説明する．

6.4　第 6 回の余談

6.1 付録 A で説明するが，基底変数とは等式制約に対する掃き出し法で係数行列から選んだ列を基底として取り直したときの対応する変数にほかならない．

6.2 二次元の平面とは $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = b$ といった三変数の一次方程式の解 (x_1, x_2, x_3) 全体の集合である．同様に，n 次元の超平面とは $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{n+1}x_{n+1} = b$ といった $n+1$ 変数の一次方程式の解 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ 全体の集合のことをいう．

6.3 基本定理 (fundamental theorem) とよばれる定理はいくつかあるが，その分野での最も基本となる結果のことである．例えば：

- 算術の基本定理：任意の 2 以上の整数は素数の積でただ一通りに表すことができる（素因数分解の一意性ともいう）
- 代数学の基本定理：次数が 1 以上の任意の複素係数一変数多項式には複素根が存在する
- 微分積分学の基本定理：一変数関数に対する微分と積分は互いの逆操作である

このうち，微分積分学の基本定理は高校数学では定義なのだが，積分をリーマン積分（区分求積法と思っても概ね正しい）で定義する立場からは定理となる．

6.4 目的関数の値が上に有界でない場合，「成分が ∞ の最適解が存在するのでは」と思われるかもしれない．しかし，無限大 ∞ はあくまでも極限概念に付随して現れるものであり，通常の数としての地位は与えないというのが現代数学での標準的な扱いである．したがって，この立場では成分が ∞ であるような解は存在できないことになる．無限大や無限小の概念は下手に扱うと様々なパラドックスを生じることから，ϵ-δ 論法のように直接は無限大・無限小を扱わない技法が発展してきたという歴史があるが，一方で二十世紀に入ってから無限大・無限小に実数と同じ地位を与えた理論体系も研究されている．興味のある者は超準解析 (nonstandard analysis) や超実数 (hyperreal number) を調べてみること．

第 7 回　シンプレックス法の概要

　線形計画問題の解法として最もよく用いられるシンプレックス法について，まずはその手順を説明する．この方法により，かなり大規模な線形計画問題でもコンピュータを使って効率的に最適解を求めることができる．

7.1　掃き出し法で最適解を求める

　前回学んだ線形計画法の基本定理 6.1 より，最適解が存在する線形計画問題を標準形に変換すれば，その基底解の中に最適解がある．ただし，問題の規模が大きくなると基底解の数が爆発的に増大するため，効率的に探索する必要がある．

　以上を踏まえて，前回の例題 6.4 を掃き出し法で再度検討しよう．この問題の標準形を再掲する：

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
\text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + s_1 = 6 \\
 & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 12 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

ここで，目的関数を $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ と置いてしまい，この式の右辺を左辺に移項したものを加えた次の連立一次方程式を考える：

$$
\begin{cases}
z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \\
2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + s_1 = 6 \\
6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 12
\end{cases}
$$

そして，これに対応させて拡大係数行列を書く：

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

ここで，新たに導入した z も変数なのだが，**第 1 行からはピボットを選ばないと約束し，z に対応する列は省略する**．第 1 行が目的関数に対応することを明示するために，横線を引いて区別してある．

最初の状態は，基底解 $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 0, 0, 6, 12)$ において目的関数の値が $z = 0$ であることを示している．これを行基本変形してみよう．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & \boxed{3} & 6 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{5}{3} & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & 4 \\ \hline \frac{2}{3} & 1 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

最初なので丁寧に書くと，これは

$$\begin{cases} z = \dfrac{5}{3}x_1 + x_3 - \dfrac{2}{3}s_1 + 4 \\ x_2 = -\dfrac{2}{3}x_1 - 2x_3 - \dfrac{1}{3}s_1 + 2 \\ s_2 = -4x_1 + 4x_3 + s_1 + 6 \end{cases}$$

を意味するので，x_1, x_3, s_1 の値を 0 にすれば，基底解 $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 2, 0, 0, 6)$ において目的関数の値が $z = 4$ であることがわかる．さきほどよりも目的関数の値が大きくなったこと，元々第 2 行でピボットに選ばれていた第 4 列に対応する s_1 が基底変数でなくなり代わりに第 2 列に対応する x_2 が基底変数になったことに注目しよう．

さらに行基本変形をする．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{5}{3} & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 0 & 4 \\ \hline \frac{2}{3} & 1 & 2 & \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{13}{2} \\ \hline 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

同様に考えると，基底解 $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (\frac{3}{2}, 1, 0, 0, 0)$ で目的関数の値が $z = \frac{13}{2}$ であることがわかる．さきほどよりもさらに目的関数の値が大きくなり，第 3 行でピボットに選ばれていた第 5 列に対応する s_2 が基底変数でなくなり代わりに第 1 列に対応する x_1 が基底変数になった．

次の行基本変形はどうすればよいだろうか．例えば $(2,4)$ をピボットに選ぶと

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{13}{2} \\ \hline 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,4)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{1}{2} & -4 & 0 & \frac{1}{2} & 6 \\ \hline 0 & 2 & \frac{16}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & 2 \end{array}\right)$$

となるが，目的関数の値が減少してしまった．これは次の三条件によることがすぐにわかる．

- ピボットに選んだ成分の値が正
- ピボットに選んだ行の右辺値が正
- **ピボットに選んだ列の第 1 行の値が正**

シンプレックス法では，このように**目的関数の値が減少するピボットの選び方は禁止する**．

それならばと，元に戻して今度は $(2,5)$ をピボットに選ぶと

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{13}{2} \\ \hline 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,5)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{5}{2} & 4 & \frac{3}{2} & 0 & 9 \\ \hline 0 & -6 & -16 & -3 & 1 & -6 \\ 1 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{array}\right)$$

となるが，今度は $s_2 = -6 < 0$ と非負制約を破った基底解が得られてしまった．これは次の二条件による．

- **ピボットに選んだ成分の値が負**
- ピボットに選んだ行の右辺値が正

シンプレックス法では，このように**右辺値が負になるピボットの選び方も禁止する**．

そういうわけで，ピボットに選べそうなのは $(2,3)$ だけである．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{13}{2} \\ \hline 0 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{15}{2} \\ \hline 0 & \frac{3}{8} & 1 & \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{15}{8} \end{array}\right)$$

これで基底解 $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (\frac{15}{8}, 0, \frac{3}{8}, 0, 0)$ で目的関数の値が $z = \frac{15}{2}$ であることがわかる．このとき，**第 1 行左辺の値が全て非負となった**ので，非負制約の下ではもうどの成分をピボットに選んでも目的関数の値を大きくすることはできない．実は，これで最適解となっていることが結論できる．このことの証明は次回とする．

7.2　シンプレックス法の手順

これでシンプレックス法の手順の基本的な説明は終わっているのだが，改めてまとめた形で述べよう．

1. 与えられた線形計画問題を標準形に書き直す．
2. 目的関数の行（左辺の値は元の目的関数の各変数の係数の -1 倍になることに注意）を一番上に加えた拡大係数行列を作る．
3. 作った拡大係数行列が全ての行からピボットが選ばれている形となっており，直ちに実行可能基底解（**初期実行可能基底解** (initial basic feasible solution)）がわかる場合は次に進む．そうでない場合の対処については第 10 回や第 12 回で説明する．
4. 第 1 行（目的関数の行）の左辺の値が全て非負ならば，この拡大係数行列が与える基底解が最適解で一番右上の値が最適値なので終了．答えを出力するときは標準形から元の問題に戻して読み替えることに注意する．
5. 第 1 行（目的関数の行）の左辺の値が負である列のうち，その第 2 行以下に正の値が存在する列を選ぶ．第 2 行以下の正の値でそれぞれの行の右辺の値を割った結果が最小になるものをピボットに選び，行基本変形をする．3 に戻る．

これを**シンプレックス法**や**単体法** (simplex method) という[余談7.1]．シンプレックス法は 1947 年にアメリカのダンツィーグが発表した[余談7.2]．特にシンプレックス法を実行するのに用いる拡大係数行列を**シンプレックス表** (simplex tableau) や**辞書** (dictionary) とよぶことがあるが，このテキストでは単に拡大係数行列とよぶ．シンプレックス法を用いることで，非負制約を守りながら基底変数を次々に取り替え[余談7.3]，効率良く目的関数の値を増大させていくことができ，大規模な問題では膨大な計算量が削減される．

≫ **ピボットの選び方**　手順 5 で書いたピボットの選び方が複雑でよくわからないだろう．既に説明した通り，「第 1 行（目的関数の行）

の左辺の値が負である列のうち」は正の列を選ぶと目的関数の値が減少してしまうため,「第 2 行以下の正の値で」は負の値を選ぶと非負制約を破ってしまうためである．では，その後にある「それぞれの行の右辺の値を割った結果が最小になるものを」というのは何のための条件だろうか？

先の拡大係数行列を再掲しよう．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right)$$

第 1 列の第 1 行が負の値で，第 2 行の値で右辺値を割ると $\frac{6}{2} = 3$，第 3 行の値で右辺値を割ると $\frac{12}{6} = 2$ である．手順 5 によると，このときは $(3, 1)$ をピボットに選ばなければならない．$(2, 1)$ をピボットに選ぶと何が起こるだろうか．やってみると，

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{2} & 3 & 6 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{5}{2} & 4 & \frac{3}{2} & 0 & 9 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & -6 & -16 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

と，やはり非負制約を破ってしまうのである．一般に，次の変形を見ればこの条件が常に必要であることがわかるだろう．

$$\left(\begin{array}{c|c} \boxed{a_1} & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{c|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} \\ 0 & b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2 \end{array}\right)$$

$b_2 - \frac{b_1}{a_1}a_2 \geq 0$ でなければならないが，このための条件は $\frac{b_1}{a_1} \leq \frac{b_2}{a_2}$ である．

≫ **最大係数規則**　手順 5 には「第 1 行（目的関数の行）の左辺の値が負である列のうち」とあるが，複数の候補がある場合にどの列を選

ぶべきなのかは述べていなかった．選んだ列の第 1 行の値を 0 にするのだから，なんとなく第 1 行の値の絶対値が大きな列を選んだ方が目的関数の値が大きくなりそうな気がする．実際にはこれは正しくなく，必ずしもこう選ぶのが最も早いとは限らないのだが，わざわざ追加の計算をしてまで手順を減らすことを目指すよりも経験的に良い場合が多いことが知られており，**最大係数規則** (largest coefficient rule) という[余談7.4]．プログラムを書く場合には最大係数規則で実装すればほぼ問題ないが，ごくまれにこれでは問題が生じる可能性があるということを第 9 回で説明する．

例題 7.1

次の線形計画問題の最適解と最適値をシンプレックス法を用いて求めよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \\
\text{条件} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

解答　標準形に書き直すと

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \\
&\text{条件} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 5 \\
&\qquad\quad x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 6 \\
&\qquad\quad 2x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 7 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．目的関数を $z = 6x_1 + 9x_2 + 2x_3$ と置いて拡大係数行列を作る：

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
-6 & -9 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}\right)
$$

まず，最大係数規則により第 2 列からピボットを選ぶ．第 2 行以下の値で右辺値を割ると，順に $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{7}{1} = 7$ なので，これが最小の $(3, 2)$ をピボットに選ぶ．行基本変形すると．

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
-6 & -9 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
1 & \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,2)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
-\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 27 \\
\hline
\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\
\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\
\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 4
\end{array}\right)
$$

となる．次に第 1 列からピボットを選ぶ．第 2 行以下の値で右辺値を割ると，順に $\frac{2}{1/2} = 4$, $\frac{3}{1/2} = 6$, $\frac{4}{3/2} = \frac{8}{3}$ となるので，これが最小の $(4, 1)$

をピボットに選ぶ．行基本変形すると，

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 27 \\ \hline \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \boxed{\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 1 & 31 \\ \hline 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right)$$

となる．これで第 1 行の左辺の値が全て非負になったから，最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, 0)$，最適値は 31 であることがわかった． ■

7.3　目的関数の値が上に有界でない場合の検出

今回の最後では，前回の最後に触れた最適解が存在しない場合について述べておこう．そもそもシンプレックス法では開始時に初期実行可能基底解が見つかっていることが前提になっているので，実行可能解が存在しない場合には始めることができない．この場合については第 10 回で説明する．もう一つの目的関数の値が上に有界でない場合にはどうなるだろうか．前回の例題 6.6 で見てみよう．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & x_1 + 2x_2 \\ \text{条件} & 3x_1 + 2x_2 - s_1 = 6 \\ & 6x_1 + 2x_2 - s_2 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

シンプレックス法を適用すると（初期実行可能基底解が見つかっていないが，とりあえず変形する）

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & -1 & 0 & 6 \\ 6 & \boxed{2} & 0 & -1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ \hline -3 & 0 & \boxed{-1} & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 0 & -1 & 9 \\ \hline 3 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{array}\right)$$

これで実行可能基底解 $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, \frac{9}{2}, 3, 0)$ で目的関数の値が $z = 9$ であることがわかった．まだ $(1,4)$ が負の値だが，$(2,4)$ と $(3,4)$ がどちらも負の値となっている．これは

$$\begin{cases} z = -5x_1 + s_2 + 9 \\ s_1 = -3x_1 + s_2 + 3 \\ x_2 = -3x_1 + \dfrac{1}{2}s_2 + \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

ということだが，$x_1 = 0$ としたまま s_2 を大きくすれば非負制約を破らずにいくらでも目的関数 z の値を大きくすることができる．よって，上に有界でない．

このように，**行基本変形の結果，第 1 行（目的関数の行）の左辺に負の値が存在するのにその列の第 2 行以下の値が全て正でない状況に辿り着いたとき，目的関数は上に有界でない**．プログラムを書く場合にはこの判定を組み込まなければならない．

7.4　第 7 回の余談

7.1 単体 (simplex) とは n 次元空間中の $n+1$ 個の頂点からなる凸包のことで，前に次元をつけて n-単体という．0-単体（点），1-単体（線分），2-単体（三角形），3-単体（四面体）などの図形を高次元も含むように一般化したもの．これがアルゴリズムの名前となっている理由はすぐ次の余談に書いてある．

なお，単体を貼り合わせてできる図形のことを複体 (complex) といい，より一般化したものが位相幾何学（トポロジー）という分野における基本的な対象となっている．

7.2 カリフォルニア大学バークレー校で数学の博士課程に在学していた George Bernard Dantzig (1914–2005) は，第二次世界大戦勃発により休学し，文民としてアメリカ陸軍航空軍統計管理本部戦闘分析部門の長となり，卓上計算機（卓上といっても現在のノート PC のようなものではなく，機械式計算機と呼ばれるもので，手でレバーを回すと歯車が動いて計算ができる）を用いて軍事作戦の計画法の研究を行った．戦争が終わったあと，博士号を取得したダンツィーグはアカデミックポスト（大学教員などの職）を探していたが，軍の同僚が転職させないために計画法の機械化への挑戦に誘った．ちょうどこの頃が電子コンピュータの黎明期で（卓上に乗るわけはなく，大きな部屋を一つ専有する，現在でいうスーパーコンピュータ），従来より複雑な計算が容易にできるようになりつつあったこともダンツィーグをこの仕事に向かわせた．1947 年のことである．

その頃はまだ目的関数という概念がなく，指揮官が経験に基づき良し悪しを判断していたのだが，自動化のためには判断基準を数式にしなければならなかった．そこで，当時興味を持っていた 1932 年のレオンチェフによるアメリカ経済の産業連関表という単純な行列モデルを一般化することで，線形の関数を線形の等式・不等式の制約の下で最大化・最小化するという線形計画問題の枠組みを作り出した．この問題が解けるのかどうか，当時シカゴ大学にいた経済学者のクープマンスに尋ねたところ，線形計画問題の経済学への応用可能性に気づいてひどく興奮するばかりであったので（後にクープマンスは線形計画法の資源配分問題への応用でノーベル経済学賞を受賞），どうやら解法は知られていないようだと判断し，自分でアルゴリズムを開発することにした．

実行可能領域の頂点を順に辿って目的関数の値を大きくしていく方法は最初に思いついたアイデアであったが，これはわざわざ領域の外側を遠回りするもので，最適解に向かって領域内を直進する方が直感的には効率がよさそうなので（第 14 回を参照），当初は完全に捨て去ろうとしていた．ところが，以前に学生だった頃に，統計学のネイマン教授が授業中に黒板に書いた当時の未解決問題を，授業に遅刻したダンツィーグが宿題と勘違いして解いてしまうという事件があって，このときの経験がシンプレックス法をゴミ箱から救った．細かな経緯は省くが，その問題は要するに，ある積分で表される等

式制約の下である積分値を最小にする領域 Ω 上の確率密度関数 $p(x)$ を求めよ，つまり

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \displaystyle\int_\Omega f(x)p(x)\,\mathrm{d}x \\ \text{条件} & \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{g}(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{b} \\ & \displaystyle\int_\Omega p(x)\,\mathrm{d}x = 1 \\ & p(x) \geq 0 \quad \text{for } x \in \Omega \end{array}$$

という問題であった．ここで $\boldsymbol{g}(x), \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{m-1}$ である．以下ではこの問題の連続ではなく離散の場合，つまり $p(x)$ が点 $x_1, x_2, x_3, \cdots \in \Omega$ でのみ確率をとりえる場合を考えよう．$f(x_j) = c_j, \boldsymbol{g}(x_j) = \boldsymbol{a}_j$ と置き，確率 $p(x_j)$ を単に x_j と書けば,

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \sum c_j x_j \\ \text{条件} & \sum \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ & \sum x_j = 1 \\ & x_j \geq 0 \quad \text{for } j = 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

となって，まさに線形計画問題になるのであった．さらに，離散でも変数 x_j の数は無限個の場合がありえるので，自然と目は目的関数と制約条件に出てくる各変数の係数の方に向き，そのおかげでこちらの方が分析には便利だと気づいた．

一旦 $\sum x_j = 1$ は脇に置いておき，残り $m-1$ 本の等式制約 $\sum \boldsymbol{a}_j x_j = \boldsymbol{b}$ に目的関数の係数も含めた拡大係数行列を書くと，各列 $\begin{pmatrix} c_j \\ \boldsymbol{a}_j \end{pmatrix}$ は m 次元ベクトルである．n 個の決定変数から m 個の基底変数を選び，先の条件 $\sum x_j = 1, x_j \geq 0$ の下で基底変数を動かせば，m 本の係数ベクトルが指す点を頂点とする m 次元空間内の $(m-1)$-単体ができる．一方で，$m-1$ 本の等式制約は m 次元空間内の直線，つまり z をパラメータとして $\begin{pmatrix} z \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ と表される点全体を定め，この $(m-1)$-単体と一点で交わる（この交点が基底解と対応する）．ここで別の列ベクトルを一つ追加すると m-単体ができ，先の交点がある面とは別の面の $(m-1)$-単体と等式制約の直線との交点がもう一つできて，この交点のある $(m-1)$-単体に移ることが基底変数の取り替えと解釈できる．この直線を目的関数の軸の負の方向へと進むように新しい単体を次々に取っていくのが「シンプレックス法」である．

このように，決定変数が作る n 次元空間ではなく，各決定変数の係数ベクトルがある m 次元空間へと視点を変えると，目的関数が大きくなる方向に等式制約が定める直線と交点を持つような新しい $(m-1)$-単体の候補はとても少なく，m ステップ程度で解けるのではないかと予想することができ，実際に「平均的な場合」を仮定するとこれが正し

いことを示すことができた．一般に制約 $\sum x_j = 1$ がない場合は，m 本の係数ベクトルを選ぶとそれらを頂点とする単体を含むような超平面ができるが，全く同じように考えることができる．

ダンツィーグは過去の類似のアイデアの例を挙げながら，シンプレックス法は数学者なら誰でもすぐに思いつくものだが同時に役に立たないとして捨ててしまう方法であり，自分の貢献は先人の発見とは独立にアルゴリズムを提案し，実用的なソフトウェアの開発を始め，着眼点を行から列に変えることで幾何的な直感に反して効率がよいことを示したことだと述べている．これに類似した，行と列を入れ替えて考える話は，第 11 回の双対定理で再び出てくることになる．

以下はこの余談で参考にした，ダンツィーグ自身による回顧録である．

G. B. Dantzig, *Reminiscences about the Origins of Linear Programming*, Technical Report SOL 81-5, Dept. of Operations Research, Stanford University, 1981.
`https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA112060`

G. B. Dantzig, *Origins of the Simplex Method*, in A history of scientific computing 141–151, S. G. Nash ed., Association for Computing Machinery, 1990.
`https://doi.org/10.1145/87252.88081`

7.3 ピボットを選んで行基本変形することにより，新たに x_e が基底変数となって，これまでの基底変数 x_l が非基底変数になったとき，x_e を基底に入る変数 (entering variable)，x_l を基底から出る変数 (leaving variable) ということがある．

7.4 最大係数規則は，英語では most negative coefficient rule といったり，最初に Dantzig が提案したルールなので単に Dantzig’s rule といったりもする．

第 8 回　シンプレックス法の原理と改訂シンプレックス法

　シンプレックス法の手順で最適解が求まることを一般的な状況で説明する．また，計算を効率的に行うための改訂シンプレックス法についても簡単に述べる．

8.1　ブロック行列

　準備として，ブロック行列について説明する．

　これまでにも行列をベクトルを並べたものとみなすという考え方は何度も出てきたが，この一般化として行列を並べた行列のことを**ブロック行列** (block matrix) という．二つのブロック行列

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(l_1+l_2)\times(m_1+m_2)}, \quad \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(m_1+m_2)\times(n_1+n_2)},$$

$$A_1 \in \mathbf{R}^{l_1\times m_1}, \quad B_1 \in \mathbf{R}^{l_1\times m_2}, \quad C_1 \in \mathbf{R}^{l_2\times m_1}, \quad D_1 \in \mathbf{R}^{l_2\times m_2},$$

$$A_2 \in \mathbf{R}^{m_1\times n_1}, \quad B_2 \in \mathbf{R}^{m_1\times n_2}, \quad C_2 \in \mathbf{R}^{m_2\times n_1}, \quad D_2 \in \mathbf{R}^{m_2\times n_2}$$

があるとき，

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(l_1+l_2)\times(n_1+n_2)}$$

であることは行列・行列積の定義から直ちにわかる．

　特別な場合として，正方行列で左下ブロックの成分が全て 0 である場合を考えよう：

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)},$$

$$A \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}, \quad B \in \mathbf{R}^{n_1\times n_2}, \quad O \in \mathbf{R}^{n_2\times n_1}, \quad D \in \mathbf{R}^{n_2\times n_2}.$$

ここで，O の成分は全て 0 である．このとき，もし A と D が可逆ならば，$X \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_2}$ について

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & A^{-1}B + XD \\ O & I_{n_2} \end{pmatrix}$$

であるから，$X = -A^{-1}BD^{-1}$ ならば単位行列になる．つまり，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

である[余談8.1]．

8.2　最適解であることの証明

標準形の問題を考えよう：

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \\ \text{条件} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

ここで，$A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$ である．表記が煩雑になるのを防ぐため，以下では

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m, \quad \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n-m}$$

とし，$x_1, x_2, \ldots, x_m$ を基底変数，$x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ を非基底変数に固定する．実際の問題に当てはめるためには，添字をつけかえることで

この順番になるようにする．これに合わせて A の列も並べることにする：

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}, \\
B &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times m}, \\
N &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{m+1} & \boldsymbol{a}_{m+2} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times(n-m)}.
\end{aligned}
$$

B を**基底行列** (basis matrix) とよび，可逆であると仮定する．また N を**非基底行列** (non-basis matrix) とよぶ．$\boldsymbol{c}$ についても同様に

$$
\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^m, \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} c_{m+1} \\ c_{m+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n-m}
$$

とする．

シンプレックス法を実行するための拡大係数行列を作ると

$$
\left(\begin{array}{cc|c} -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \hline B & N & \boldsymbol{b} \end{array}\right)
$$

となる．定理 4.2 で述べたことを現在の状況に合わせると，拡大係数行列に B の対角成分をピボットに選んだ行基本変形をすることは，（第 1 行が $z - \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0$ を表していて，目的関数 z の列を省略していたことに注意して）式 (8.1) より

$$
\begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} \\ \boldsymbol{0} & B^{-1} \end{pmatrix}
$$

を左からかけることで表すことができる．実際にかけてみると

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} \\ \boldsymbol{0} & B^{-1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|c} -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \hline B & N & \boldsymbol{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} \boldsymbol{b} \\ \hline I_m & B^{-1} N & B^{-1} \boldsymbol{b} \end{array}\right) \tag{8.2}$$

を得る．したがって，示したいことは次のように表される．

定理 8.1

標準形の問題に対して，ここまでに導入した記号を用いて，もし $B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ が成り立つならば，最適解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix},$$

最適値は $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} \boldsymbol{b}$ である．

証明　ここまでの議論により，標準形の問題は次と等価であることがわかった：

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & -(\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} \boldsymbol{b} \\ \text{条件} & \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + B^{-1} N \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = B^{-1}\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ より，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$ の成分を一つでも正にすれば，目的関数の値は $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} \boldsymbol{b}$ よりも小さくなる．つまり，等式制約がどうであっても，非負制約を守る限り，目的関数の値は最大でも $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} \boldsymbol{b}$ である．そこで，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{0}$ とすれば，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ が実行可能であるので，定理の主張を得る． ■

注意　ここでは行基本変形後の拡大係数行列をあえてブロック行列を使ってあっさり計算したが，次のように考えることも可能である．基底行列等を用いれば，標準形は

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\
&\text{条件} \quad B\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + N\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{b} \\
&\qquad\quad\ \ \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

と書ける．等式制約条件の両辺に左から B^{-1} をかければ

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} + B^{-1}N\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} = B^{-1}\boldsymbol{b}$$

となるから，

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = -B^{-1}N\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} + B^{-1}\boldsymbol{b}$$

を得る．これを目的関数に代入すれば

$$
\begin{aligned}
z &= \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}(-B^{-1}N\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} + B^{-1}\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \\
&= -(\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}\boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

となるので，拡大係数行列を書けば式 (8.2) のようになる．

8.3　改訂シンプレックス法

シンプレックス法では拡大係数行列全体を行基本変形していったが，ここまでに導入した記号を用いて改めて検討すると，実際には次の値がわかっていれば計算できることに気づく．

- $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}}$

- $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ のピボットを選ぶ列の値（$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 全体ではなく）と $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$

これらをピボットの選択に応じて $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{N}$ を更新しながら順次計算し，$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ となったら最適解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ と最適値 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ を計算して出力すればよい．これにより，$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 全体を計算しなくて済むので，決定変数の数（A の列数）が多い場合に計算時間の節約が見込める．これを**改訂シンプレックス法** (revised simplex method) という．

実際に計算するときには $\boldsymbol{B}^{-1}$ の更新が問題になるが，これには次の定理を使うと便利である．

定理 8.2

$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_k & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は可逆であるとし，その第 k 列を $\tilde{\boldsymbol{a}}_k$ に置き換えた行列を $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \tilde{\boldsymbol{a}}_k & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ とする．このとき，$\tilde{A}$ も可逆ならば

$$\tilde{A}^{-1} = TA^{-1}$$

が成り立つ．ただし，

$$A^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}}_k = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$$

とするとき，

$$
T = \begin{pmatrix}
1 & & & -t_1/t_k & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & -t_{k-1}/t_k & & & \\
& & & 1/t_k & & & \\
& & & -t_{k+1}/t_k & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & -t_n/t_k & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

証明　逆行列の定義と行列・行列積の定義 (3.3) より

$$
\begin{aligned}
A^{-1}\tilde{A} &= \begin{pmatrix} A^{-1}\boldsymbol{a}_1 & \dots & A^{-1}\boldsymbol{a}_{k-1} & A^{-1}\tilde{\boldsymbol{a}}_k & A^{-1}\boldsymbol{a}_{k+1} & \dots & A^{-1}\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & & & t_1 & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & \\
& & 1 & t_{k-1} & & & \\
& & & t_k & & & \\
& & & t_{k+1} & 1 & & \\
& & & \vdots & & \ddots & \\
& & & t_n & & & 1
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & t_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & t_{k-1} & & & \\ & & & t_k & & & \\ & & & t_{k+1} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & t_n & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} A^{-1}
$$

である．この左からかかる逆行列が T であることは容易に確認できる． ■

前回の例題 7.1 を用いて改訂シンプレックス法を説明しよう．標準形を再掲すると，

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \\
&\text{条件} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 5 \\
&\qquad\quad x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 6 \\
&\qquad\quad 2x_1 + x_2 + x_3 + s_3 = 7 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

≫ **ステップ 1**　まず最初に基底変数を s_1, s_2, s_3 と選ぶと，

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

$\boldsymbol{B}$ の逆行列 $\boldsymbol{B}^{-1}$ の計算は単位行列なので容易で

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

非基底変数は x_1, x_2, x_3 であり，

$$\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

また，

$$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ ではないから，ピボットを第 2 列から選択する．$\boldsymbol{N}$ の第 2 列に $\boldsymbol{B}^{-1}$ をかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

である．それぞれの成分で $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ の対応する成分を割ると順に $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{6}{2} = 3$, $\frac{7}{1} = 7$ であるから，最小である第 2 成分をピボットに選ぶ．これは 2 番目の基底変数である s_2 を 2 番目の非基底変数 x_2 と入れ替えることを意味する．

≫ **ステップ 2**　基底変数は s_1, x_2, s_3 であり，

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 8.2 より，この B の逆行列 B^{-1} は「前回の B^{-1}」(8.3) に式 (8.4) から作った行列 T を左からかけることで計算できる：

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

また，非基底変数は x_1, s_2, x_3 であり，

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また,

$$B^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ ではないから，ピボットを第 1 列から選択する．N の第 1 列に B^{-1} をかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \tag{8.6}$$

である．それぞれの成分で $B^{-1}\boldsymbol{b}$ の対応する成分を割ると順に $\frac{2}{1/2} = 4$, $\frac{3}{1/2} = 6$, $\frac{4}{3/2} = \frac{8}{3}$ であるから，最小である第 3 成分をピボットに選ぶ．これは 3 番目の基底変数である s_3 を 1 番目の非基底変数 x_1 と入れ替えることを意味する．

≫ **ステップ 3**　基底変数は s_1, x_2, x_1 であり，

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

定理 8.2 より，この B の逆行列 B^{-1} は「前回の B^{-1}」(8.5) に式 (8.6) から作った行列 T を左からかけることで計算できる：

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

また，非基底変数は s_3, s_2, x_3 であり，

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

また，

$$\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ であるから，これで最適解が

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_3 \\ s_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求まった．最適値は

$$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = 31$$

である．

過程を元のシンプレックス法と比べてみよ．おそらく人手でやるには行基本変形の方がやりやすいと感じられるだろうが，プログラムを組む際には行列計算ルーチンを使えばそこまで手間ではない．

8.4　第 8 回の余談

8.1　一般に，正方ブロック行列

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}, \quad A \in \mathbf{R}^{n_1\times n_1}, \quad B \in \mathbf{R}^{n_1\times n_2}, \quad C \in \mathbf{R}^{n_2\times n_1}, \quad D \in \mathbf{R}^{n_2\times n_2}$$

があるとき，その逆行列はどうなるだろうか．まず，基本行列を左からかけるようにして，A を使って C を消すことを考えよう．これは A が可逆ならば次のように実現できる：

$$\begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ -CA^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

ここに出てきた $D - CA^{-1}B$ をシューア補行列 (Schur complement) という．これより，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ -CA^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

なので，$D - CA^{-1}B$ も可逆ならば，式 (8.1) より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ -CA^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ O & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n_1} & O \\ -CA^{-1} & I_{n_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を得る．こういうブロック行列の複雑な式は制御理論を勉強するとよく出てくるが，筆者は個人的にはあまり好みではない．

第 9 回　退化と巡回

ここまでで，シンプレックス法によって条件が満たされれば確かに最適解が得られることがわかったが，有限回の行基本変形で必ず最適解が得られるかどうかは明らかでなかった．もし等式制約の右辺値が常に全て正ならば，必ず有限回で最適解が得られることが示される．しかし，右辺値に 0 が存在している場合には，ピボットの選び方次第では無限ループに陥る可能性がある．これを巡回現象というが，巡回を回避するようなピボットの選び方があることも合わせて説明する．

9.1　退化

まずは例題を考えよう．

例題 9.1

次の線形計画問題をシンプレックス法を用いて解け．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 2x_1 + x_2 \\
\text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & 6x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
 & 8x_1 + x_2 \leq 12 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

解答　標準形は

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad 2x_1 + x_2 \\
&\text{条件} \quad 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\
&\qquad\quad\ 8x_1 + x_2 + s_2 = 12 \\
&\qquad\quad\ 6x_1 + 2x_2 + s_3 = 9 \\
&\qquad\quad\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

であるから，拡大係数行列を作ってシンプレックス法を最大係数規則で適用すると

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
\boxed{8} & 1 & 0 & 1 & 0 & 12 \\
6 & 2 & 0 & 0 & 1 & 9
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 3 \\ \hline
0 & \frac{13}{8} & 1 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{2} \\
1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{2} \\
0 & \boxed{\frac{5}{4}} & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,2)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 3 \\ \hline
0 & 0 & 1 & \boxed{\frac{3}{5}} & -\frac{13}{10} & \frac{3}{2} \\
1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{2} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,4)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{2} \\ \hline
0 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{13}{6} & \frac{5}{2} \\
1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}
\end{array}\right)
$$

となるので，最適解は $(x_1, x_2) = (1, \frac{3}{2})$，最適値は $\frac{7}{2}$ である．■

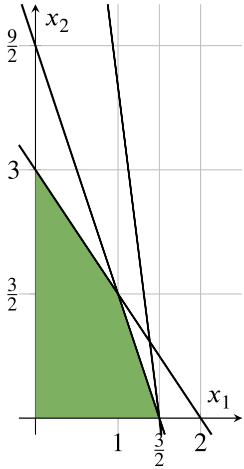


図 9.1　例題 9.1 の実行可能領域.

問題なく解けたが，基底解の変化に着目しよう．順に $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 6, 12, 9)$, $(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0)$, $(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0)$, $(1, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0)$ となっており，2 つ目と 3 つ目に得られた基底解が等しくなっている．この二つの基底解には 0 でない値が 3 個あることが期待されるにも関わらず，2 個しかない．2 つ目の基底解では s_3 が，3 つ目の基底解では x_2 が，基底変数であるにも関わらず 0 となっている．このような基底解を**退化** (degenerate) しているという[余談9.1]．この原因は第 4 行の右辺の値が 0 となっていることであり，基底解が行基本変形で変わらなかった原因も第 4 行からピボットが選ばれたことにある．右辺の値が 0 の行（これを「退化している行」ということがある）があると，ピボットを選択した列のその行の値が正でありさえすればピボットに選ばれてしまうため，この行が何度も選ばれ続けてしまうということもありえる．

退化した基底解が生じる原因は，制約条件が指す領域の境界が三つ以上重なることにある．図 9.1 がこの問題の実行可能領域であるが，2 つ目と 3 つ目の制約条件と $x_2 \geq 0$ が指す領域の境界が $(x_1, x_2) = (\frac{3}{2}, 0)$ で重なっていることがわかる．

9.2　巡回

退化した行が存在すると，極端な場合はそこから抜けられなくなってしまうことがある．

次の線形計画問題を考えよう．

$$
\begin{aligned}
\text{最大化} \quad & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \\
\text{条件} \quad & \frac{1}{2}x_1 - \frac{11}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 9x_4 \leq 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_4 \leq 0 \\
& x_1 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

この問題に，最大係数規則でかつ，左辺値で右辺値を割った結果の最小値が複数ある場合は一番上の行から選択する規則でシンプレックス法を実行すると，次のように 6 回で元に戻ることが確認できる．

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
-10 & 57 & 9 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\boxed{\frac{1}{2}} & -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{(2,1)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & -53 & -41 & 204 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & -11 & -5 & 18 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 2 & -8 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 11 & 5 & -18 & -2 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{(3,2)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & -\frac{29}{2} & 98 & \frac{27}{4} & \frac{53}{4} & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & -\frac{3}{4} & \frac{11}{4} & 0 & 0 \\
0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 & \frac{3}{4} & -\frac{11}{4} & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{(2,3)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
29 & 0 & 0 & -18 & -15 & 93 & 0 & 0 \\ \hline
2 & 0 & 1 & -8 & -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{(3,4)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
20 & 9 & 0 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{141}{2} & 0 & 0 \\ \hline
-2 & 4 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{(2,5)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
-22 & 93 & 21 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\ \hline
-4 & 8 & 2 & 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\substack{(3,6)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
-10 & 57 & 9 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\frac{1}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{5}{2} & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

このようなことが起こると，同じ規則で計算している限りは無限ループに陥ってしまい，終了することがない．この現象を**巡回** (cycling) という[余談9.2]．「巡回」とはいうものの，これは値が 0 の基底変数を延々と取り替えることであり，基底解はある一点から動かないことに注意する．

巡回が起きないための条件として，まず次のことは容易に示される．

定理 9.1

もし退化した実行可能基底解が存在しなければ，巡回は発生せず，シンプレックス法は必ず有限回で終了する．

証明　退化した実行可能基底解が存在しなければ，拡大係数行列に退化した行が現れることもない．したがって，ピボットを選んで行基本変形すると必ず目的関数の値が増大する．実行可能基底解は有限個しかないので，実行可能基底解での値に限定すれば目的関数の値には最大値が存在し，いつまでも増大し続けるということはありえない．よって，シンプレックス法は必ず有限回で終了する．■

注意　この証明を「目的関数の値には常に最大値が存在する」と読み間違えないように．あくまでも**実行可能基底解での値に限定すれば**ということである．目的関数の値が上に有界でないときは，実行可能基底解での値よりも大きな値をとる実行可能解が存在するのであった．

それでは，肝心の退化した実行可能基底解が存在する場合は，巡回が起きないことを保証する方法はないのであろうか？

9.3　最小添字規則

巡回を検出したときには，かつては「辞書式摂動法」と呼ばれる，退化した行の右辺に大きさの異なる微小値 $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ を加えて非退化にし，最適解が求まってから $\epsilon_j = 0$ とするという方法が用いられていた．しかし，1977 年にアメリカの Bland が，ピボット選択規則として

- 第 1 行（目的関数の行）の左辺の値が負である列のうち，一番左の列を選ぶ.
- 第 2 行以下のピボットの候補が複数あるときは，そのうちの一番上の行にあるものをピボットに選ぶ.

というルールを採用すると巡回が起こらないことを示した．これを**最小添字規則** (smallest subscript rule) という[余談9.3]．最小添字規則で前節の問題を解くと，6 回目の行基本変形のピボット選択が変わって次のようになる：

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
-22 & 93 & 21 & 0 & 0 & -24 & 0 & 0 \\
\hline
-4 & 8 & 2 & 0 & 1 & -9 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 27 & -1 & 44 & 0 & 20 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -4 & -2 & 8 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -3 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c|c} 0 & 30 & 0 & 42 & 0 & 18 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

こうして，最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0)$，最適値は 1 であることがわかった．なお，「制約 $x_1 \leq 1$ があるから止まるのではないか」と思われるかもしれないが，制約 $x_1 \leq 1$ がない場合は全ての値が負の列ができて，目的関数が上に有界でないことがわかるので，この場合もちゃんと停止する．

定理 9.2

最小添字規則でシンプレックス法を実行すると，巡回は起こらない．

証明は，最小添字規則で巡回が起きたと仮定して，巡回中に基底変数の取り替えの対象となる変数のうち添字が最も大きいもの x_q に着目し，x_q の列からピボットが選ばれるときに，最小添字規則に従えば x_q よりも添字が小さなピボット選択候補列が存在することを示す（背理法）．初等的な議論ではあるが，若干ややこしいのでここでは省略する．

» **そもそも巡回は起こらない**　1977 年当時，ブダペストの数理計画法国際シンポジウムで Bland の講演を聴いた伊理正夫先生が，次のように報告している（伊理正夫, “辞書的順序” や “摂動” は線形計画法の教科書から姿を消すことになるでありましょう，オペレーションズ・リサーチ **22** (1977) 110–113, http://www.orsj.or.jp/~archive/pdf/bul/Vol.22_02_110.pdf）．「……」の

部分は中略である．

> 退化が生じても巡回は起こさないようにするために，……大がかりな“理論”に裏づけられた方法が考えられ，本格的な書物にはそのことが相当の行数（いやむしろページ数）を割いて書いてある．……
>
> 私自身も致し方なくそうした本を書いたことがあるが……特別の巡回対策をとり入れないで普通につくられたプログラムでもけっして巡回は起こさないということが“経験的に”知られているのであるから……，何のためにこんな大がかりな“理論”を展開しなければならないのかと，書きながら懐疑的にならざるをえなかった．
>
> ……
>
> しかし，これほど簡単なことで巡回が起こらないのなら，なぜもっと早く気づかれなかったのだろうか．……「むずかしいことは有難いことだ」という偏見に専門家が惑わされていたため，それ以上つきつめることがされなかったのではなかろうか．
>
> ……
>
> Bland 氏が「巡回対策としては<A’>, <B’>で十分だ」といったとき，前の席にいた G. B. Dantzig 先生はけげんな顔をして「それだけでか？」と聞き直し，不審そうにブツブツ独り言をいっていた．証明を聞いたとき，私には本当らしく思え，さっそくニュースとしてご報告しようかと思ったが，なにせ前回のこの Symposium では，Scolnik とかいう人の「m 回の反復で $m \times n$ の線形計画問題を解く方法」という“画期的”な間違った話にひと騒ぎさせられたという前例があるので，……内容を検討した上でご報告する次第である．

ここに書かれているように，巡回が起こるのはごくまれなことであり，最大係数規則で実装しておけばほとんどの場合困ることはなく，最小添字規則よりも早く問題を解くことができる．万全を期すならば，通常は最大係数規則で解くようにしておき，もし退化した行からピボットが選ばれたら，そこから抜け出すまでは最小添字規則を使うようにしておくとよい．

例題 9.2

次の線形計画問題をシンプレックス法で解くとき，最小添字規則と最大係数規則での計算回数の違いを比較せよ．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{条件} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\
& x_1 + x_3 \leq 1 \\
& 2x_2 + x_3 \leq 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

解答　シンプレックス法を実行すると，最小添字規則の場合は次のようになる．

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
-1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,6)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と，4 回の変形で最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$，最適値 3 が求まる．

一方，最大係数規則の場合は

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

と，1 回の変形で最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1)$，最適値 3 が求まる．

■

9.4　第 9 回の余談

9.1 退化は生物学では特定の器官が縮小したり消失したりすることを指すが，数学でも同じような意味で用いられる．今の文脈では，本来二つの別の基底解があるはずが，重なって一つになってしまっており，あたかも一つが消失してしまっているような状況を指している．ただし，元からなかったのではなく，本来あったはずのものが消失している状況なので，その痕跡が残っている．英語の degenerate は他に縮退とも訳されるが，意味は大きく違わない（固有値問題など）．

9.2 次の論文で巡回を起こす線形計画問題の例が多く紹介されている：

Y. Yang, *Cycling problems in linear programming*, arXiv:2101.01805 [math.OC]. `https://doi.org/10.48550/arXiv.2101.01805`

9.3 最小添字規則は，Bland が提案したので単に Bland’s rule ともいう．Bland の原論文：

R. G. Bland, *New finite pivoting rules for the simplex method*, Math. Oper. Res. **2** (1977) 103–107. `https://doi.org/10.1287/moor.2.2.103`

第 10 回　二段階シンプレックス法

ここまでで一通りシンプレックス法について説明したが，最初に初期実行可能基底解が見つかっていないときにどうすればよいかを積み残しにしていた．このために，まず実行可能基底解を一つ見つけるための補助問題をシンプレックス法で解き，その後元の問題をシンプレックス法で解くという二段階で最適解を見つける方法を説明する．これでどんな問題でも，最適解が存在すれば有限回の計算で見つけることができるようになる．

10.1　実行可能基底解を最適解とする補助問題

≫ **初期実行可能基底解が見つからない問題**　今回は次の問題を考えよう．

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{条件}\quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
& 6x_1 + 2x_2 \geq 9 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

標準形は

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{条件}\quad & 3x_1 + 2x_2 - s_1 = 6 \\
& 6x_1 + 2x_2 - s_2 = 9 \\
& 2x_1 + x_2 + s_3 = 4 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

であるから，拡大係数行列を書けば

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & -1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

となる．この段階では初期実行可能基底解が得られていないことに注意しよう[余談10.1]．ここから無理矢理シンプレックス法を始めるとどうなるであろうか．

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & \boxed{2} & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & -1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ \hline \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

となって終了するが，第 3 行からピボットを一度も選んでいないので，実行可能基底解が求まらないままとなっており，最適解も得られていない．このように，実行可能基底解が一つもないままシンプレックス法を無理に適用しても最適解は得られないことが多いので，まずは実行可能基底解を一つ見つける必要がある．

≫ **補助問題**　これを解決するためには，次のようにピボットが選ばれていない行に**人工変数** (artificial variable)[余談10.2] を導入した**補助問題** (auxiliary problem) を作り，まずは実行可能基底解を一つ求めるという

手順を踏む．今の問題の場合，ピボットが選ばれていない第 1 行，第 2 行に人工変数 v_1, v_2 を導入した補助問題

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad && v_1 + v_2 \\
&\text{条件} && 3x_1 + 2x_2 - s_1 + v_1 = 6 \\
& && 6x_1 + 2x_2 - s_2 + v_2 = 9 \\
& && 2x_1 + x_2 + s_3 = 4 \\
& && x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, v_1, v_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

を考えよう．なお，右辺が正の場合は $+v_j$ を，負の場合は $-v_j$ をその行に追加すること．今は二つの行の右辺がどちらも正なので，プラスで追加してある．もし $v_1 = v_2 = 0$ とすれば元の問題の制約条件に戻るが，$v_1, v_2 \geq 0$ よりそれがこの補助問題の最適解で，最適値 0 を与えるはずである．補助問題の最適解が求まったときに，それが人工変数を基底変数として含まない基底解になっていれば，元の問題の実行可能基底解が得られたことになる．

人工変数は一番右の列に置いて，拡大係数行列を作れば

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
3 & 2 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 6 \\
6 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 9 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4
\end{array}\right)
$$

となる．追加した人工変数が基底変数になるようにピボットに選んで行基本変形すると（(2, 6), (3, 7) をピボットとして変形し，第 1 行の二

つの 1 を消す）

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,6),(3,7)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
-9 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ \hline
3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
6 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4
\end{array}\right)
$$

となるので，あとは通常通りシンプレックス法を実行する．

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \hline
0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\
1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline
0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\
1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2}
\end{array}\right)
$$

これで，最適値が 0 となったので，元の問題の実行可能基底解 $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (1, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ が求まった．ここまでできたら，$v_1 = v_2 = 0$ として元の問題の制約条件の部分のみを取り出して，第 1 行には元の目的関数の係数を入れた拡大係数行列を作る．

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
-1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\
1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}\right)
$$

基底変数に対応する列から改めてピボットを選んで行基本変形すれば

$$\xrightarrow[\text{ピボットとして行基本変形}]{(3,1),(2,2),(4,5)\text{ を}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 4 \\ \hline 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{3}} & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

と元の問題で x_1, x_2, s_3 を基底変数にとった場合の拡大係数行列が作れるので，これに対して改めてシンプレックス法を適用する．

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,3)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 5 & \frac{13}{2} \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

となるので，最適解は $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, 3)$，最適値は $\frac{13}{2}$ であることがわかった．

以上のように，

- **第一段階：**ピボットが選ばれていない行，もしくは右辺の値が負となっている行に人工変数を追加した補助問題をシンプレックス法で解き，元の問題の実行可能基底解を一つ求める
- **第二段階：**第一段階で求めた実行可能基底解からシンプレックス法を適用して，元の問題の最適解を求める

と二段階で最適解を求める解法を**二段階シンプレックス法** (two-phase simplex method)，もしくは単に二段階法という．二段階シンプレックス法は汎用的な方法であり，これでどんな線形計画問題でも解くことができる．

10.2　より簡易な二段階シンプレックス法

前節で述べた方法では，補助問題を作るときにピボットが選ばれていない全ての行に人工変数を追加するので，大規模な問題では変数の数が一気に増大してしまうという欠点がある．実は，たくさんの人工変数を追加する必要はなく，一つ追加すれば十分である．

前節と同じ問題を考えよう．制約条件のみを書くと

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & -1 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

ここで，何でもよいから第 1 行と第 2 行からピボットを選んでしまおう．今回は簡単な $(1,3)$, $(2,4)$ をピボットに選んで行基本変形すると，

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,3),\,(2,4)\ \text{をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ -6 & -2 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

となる．選んだピボットによってたまたま実行可能基底解が一つ求まったら，そのまま第二段階に進んでよい．実行可能ではない基底解が一つ求まった場合は，右辺の値が負となっている行，今の場合は第 1 行，第 2 行に共通の人工変数 $-v$ を加え，$v \geq 0$ を最小化する補助問題を考えよう．この補助問題の拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6 \\ -6 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

である．補助問題を作ったら，まず人工変数の列の，右辺値が最小の行をピボットに選ぶ．今の場合，$(3, 6)$ をピボットに選んで行基本変形すれば,

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,6)\ \text{をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} -6 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ \hline 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

となる．これで補助問題の実行可能基底解が一つ得られたので，あとは通常通りシンプレックス法を適用し，最適値が 0 になれば，元の問題の実行可能基底解が一つ得られる．

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1)\ \text{をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,2)\ \text{をピボット}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

これで，最適値が 0 となったので，元の問題の実行可能基底解 $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (1, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ が求まった．あとは前節と同じで元の問題の目的関数に戻して第二段階を実行する．

例題 10.1

次の線形計画問題の最適解と最適値を求めよ[余談10.3].

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} && 3x_1 + 6x_2 \\
&\text{条件} && -5x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = -6 \\
& && 10x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = -1 \\
& && -5x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 = -1 \\
& && x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

解答　**第一段階：**まず，制約条件のみの拡大係数行列を書き，ピボットを適当に選んでとにかく基底解を一つ求めると，

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\boxed{-5} & -5 & -4 & 1 & 1 & -6 \\
10 & -5 & 1 & -4 & 1 & -1 \\
-5 & 10 & 1 & 1 & -4 & -1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,1)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\
0 & \boxed{-15} & -7 & -2 & 3 & -13 \\
0 & 15 & 5 & 0 & -5 & 5
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 1 & \frac{7}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{13}{15} \\
0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -2 & -8
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,3)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4
\end{array}\right)
$$

となる．ここで，右辺が負の値である第 1 行と第 2 行の左辺に人工変数 $-v$ を加え，$v \geq 0$ を最小化する補助問題を考えよう．この補助問題の拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

である．右辺の値が最小の行にある $(2,6)$ をピボットに選んで行基本変形すると

$$\xrightarrow{\substack{(2,6)\text{ をピボット} \\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

となるので，これに通常通りシンプレックス法を適用すれば，

$$\xrightarrow{\substack{(3,4)\text{ をピボット} \\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,1)\text{ をピボット} \\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

と最適値が 0 になり，これで元の問題の実行可能基底解が得られた．

第二段階：人工変数 v の列を削除し，元の目的関数を第 1 行に入れると

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
-3 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -3 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\
0 & 3 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

となる．まず基底変数に対応して $(2,1)$, $(4,3)$, $(3,5)$ をピボットに選ぶと

$$
\xrightarrow[\text{ピボットとして行基本変形}]{(2,1),\,(4,3),\,(3,5)\ \text{を}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & -12 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ \hline
1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
0 & \boxed{3} & 1 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

となる．あとは通常通りシンプレックス法を適用すれば，

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,2)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 7 \\ \hline
1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\
0 & 0 & 1 & 1 & \boxed{1} & 4 \\
0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,5)\ \text{をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 11 \\ \hline
1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{5}{3}
\end{array}\right)
$$

を得る．以上より，最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, 4)$，最適値は 11 であることがわかった． ■

この問題の場合，結局全体で 8 回ほどピボットを選んで行基本変形しているので，全ての基底解を調べるのと同じぐらいの計算量がかかってしまっている．補助問題を使わなくとも，適当にピボットを選んで行基本変形を繰り返せば実行可能基底解が見つかったのではないか，と思ってしまうかもしれないが，変数の数が増えて制約条件の数も増えると，基底変数全てが非負制約を満たすという条件は厳しく，そう簡単には実行可能基底解が見つけられなくなってくる．それなりの規模の問題ではじめて二段階シンプレックス法は真価を発揮することになる．

10.3　実行可能解が存在しない場合の検出

二段階シンプレックス法のもう一つの役割は，実行可能解が存在しない問題の場合にそのことを検出することである．

人工変数 $v \geq 0$ を導入し，v を最小化する補助問題においては，ここまでに見たように必ず実行可能基底解が存在し（そうなるように人工変数を導入したから），もし最適値が 0 の実行可能基底解が見つかれば，$v = 0$ を意味するから元の問題の実行可能基底解ともなっている．もし最適値が 0 にならなかったとすると，それは $v = 0$ としたときには実行可能基底解が存在しないことを意味する（存在すると最適であることに反するから）．線形計画法の基本定理 6.1 より，実行可能解が存在すれば実行可能基底解が存在するので，対偶をとれば実行可能基底解が存在しなければ実行可能解が存在しないことがわかる．

　このことを例題 6.5 で確認してみよう．その標準形は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 2x_1 + x_2 \\
\text{条件} & 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\
 & x_1 + x_2 - s_2 = 4 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{array}
$$

である．制約条件の第 2 式を −1 倍して拡大係数行列を作れば

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
3 & 2 & 1 & 0 & 6 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & -4
\end{array}\right)
$$

である．右辺の値が負である第 2 行に人工変数 $-v$ を導入し，$v \geq 0$ を最小化する補助問題を考える：

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
-1 & -1 & 0 & 1 & \boxed{-1} & -4
\end{array}\right)
$$

(3, 5) をピボットに選んで行基本変形すると

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,5)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -4 \\
\hline
\boxed{3} & 2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4
\end{array}\right)
$$

となる．これにシンプレックス法を適用すると

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & -2 \\
\hline
1 & \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 2 \\
0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & 1 & 2
\end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & -1 \\ \hline \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

となって，補助問題の最適解が $(x_1, x_2, s_1, s_2, v) = (0, 3, 0, 0, 1)$ と，v が基底変数に選ばれたまま最適値 $v = 1$ で終了してしまった．これは，元の問題の制約条件の第 2 式が $x_1 + x_2 - s_2 + 1 = 4$ ならば $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 3, 0, 0)$ が（退化した）実行可能基底解だが，この $+1$ がなければ実行可能解が存在できないことを意味している．状況をよりよく理解するために，図 6.3 も再度見ていただきたい．

10.4　第 10 回の余談

10.1 与えられた問題の制約条件が全て不等式制約で，原点が実行可能基底解である場合は，スラック変数を基底変数に選べば初期実行可能基底解が得られる．そうではない場合には基本的にこの問題が生じる．

10.2 人工変数にはスラック変数と同じ雰囲気を感じるかもしれないが，全くの別物なので混同しないこと．スラック変数は導入しても元の問題を等価なまま保つが，人工変数は元の問題にとって異物であり，最終的に消えるべき変数である．

10.3 こういう等式制約だけの問題を著者はどうやって作っているのだろう，と疑問に思わないだろうか？闇雲に作っても最適解が存在しない問題ができてしまったり，答えが汚くなったりしてしまう．こっそり手の内を明かしてしまうと……

1. まず，二変数で適当な閉じた領域を描き，それを不等式で表す．今回の場合，

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 2 \\ &-2x_1 + x_2 \le 1 \\ &x_1 - 2x_2 \le 1 \\ &x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

   とした．

2. スラック変数を導入するが，それとわからないように x_3, x_4, x_5 としておく．

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ &-2x_1 + x_2 + x_4 = 1 \end{aligned}$$

$$x_1 - 2x_2 + x_5 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

3. 三つの等式制約を適当に足し引きして，元の式がわからないようにする．今回の場合，第 1 式を -4 倍して，第 2 式，第 3 式を足せば

$$-5x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = -6$$

となる．同じ要領で残り二つの式も作る．
4. 目的関数は適当に設定する．

手の内を明かしてしまったので，試験問題の手口もバレてしまうぞ……．最初のピボットは後ろの変数から選ぶんだ！……と思いたいところだが，変数の添字もつけ替えてしまえば，元々どれがスラック変数だったかの判断も困難になると思われる．

もちろんこの余談は，秘密を大胆に開示したというわけではなく，ただの著者の備忘録に過ぎないのは言うまでもない．

第 11 回　双対定理

線形計画問題についてさらに詳しく解析をしたり，より高速なアルゴリズムを開発するためには，双対定理とよばれる定理と，そこから導かれる相補性定理が非常に重要な役割を果たす．今回は，線形計画問題には対応する双対問題というものが構成できることを説明し，両者の間の関係として弱双対定理と強双対定理を証明する．

11.1　双対問題

≫ **これから何をするの？**　ここまでで，シンプレックス法を用いた問題の解き方を一通り説明した．二段階シンプレックス法によりどんな問題でも解けるというのに，これ以上何を話すことがあるのだろうか．

実は線形計画法が本当に面白いのはここからで，線形計画問題には必ず付随して双対問題と呼ばれる線形計画問題が一つ存在し，これは元の問題の裏の顔のような存在で，見かけは違うのに実は同じという関係があることを説明する．両者の関係を調べることは理論的に面白いのみならず，シンプレックス法を超えるアルゴリズムを開発するうえでも重要な役割を果たした．さらに，双対性の考え方は非線形計画法や離散最適化にも拡張され，やはり強力な武器となるのである．そんな理論としての美しさと実用性を兼ね備えた双対性について，わかりやすくお伝えできればと思う[余談11.1]．

≫ **上界と下界**　ある実数値の集合 S があるとき，その全ての要素 $r \in S$ に対して $r \leq u$ が成り立つような u のことを S の**上界** (upper bound) という．同様に，$l \leq r$ が成り立つような l のことを S の**下界** (lower bound) という．

例えば $S = \{x \in \mathbf{R} : 3 \leq x \leq 5\}$ としよう．このとき，7 は全ての S

の要素の値以上であるから上界である．もちろん 6 も上界であるし，5 も上界であるが，4 は上界ではない．この観察から，S の最大値を求める問題は，上界を最小化する問題と言い換えることができる．ここから，最大化（最小化）を目的とする線形計画問題があるとき，その目的関数の値の上界（下界）を最小化（最大化）することで最適解を求められないか，と考えるのは自然な発想であろう．

≫ **双対問題**　例題 6.1 を題材に考えてみよう．その標準形を再掲すると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 2x_1 + x_2 \\ \text{条件} & 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\ & 6x_1 + 2x_2 + s_2 = 9 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

であった．この二つの等式制約を足し合わせた式を作ると

$$9x_1 + 4x_2 + s_1 + s_2 = 15$$

となる．実行可能解では必ずこの等式が満たされており，目的関数 $2x_1 + x_2\,(+0s_1 + 0s_2)$ とこの等式の左辺 $9x_1 + 4x_2 + s_1 + s_2$ とを係数比較すると全てこの等式の左辺の方が大きいので，全ての変数の値が非負という条件の下で

$$2x_1 + x_2 \leq 9x_1 + 4x_2 + s_1 + s_2 = 15,$$

つまり 15 はこの問題の最適値以上であることがわかる．もっと良い上界は，今の場合は単に等式の両辺を $\frac{1}{4}$ 倍すれば

$$2x_1 + x_2 \leq \frac{9}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = \frac{15}{4}$$

がわかる．これ以上小さくしてしまうと x_2 の係数が目的関数より小さくなってしまうので，同じ方法ではより小さな上界は得られない．

より良い上界を得るにはどうすればよいだろうか．等式制約を足し合わせるときに等しい割合である必要はないので，第 1 式を y_1 倍，第 2 式を y_2 倍して足すことを考えよう．

$$y_1(3x_1 + 2x_2 + s_1) + y_2(6x_1 + 2x_2 + s_2) = 6y_1 + 9y_2.$$

左辺を変数ごとに整理すれば

$$(3y_1 + 6y_2)x_1 + (2y_1 + 2y_2)x_2 + y_1 s_1 + y_2 s_2 = 6y_1 + 9y_2$$

なので，もし

$$3y_1 + 6y_2 \geq 2, \quad 2y_1 + 2y_2 \geq 1, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$

ならば

$$2x_1 + x_2 \leq 6y_1 + 9y_2$$

である．より良い上界，つまりこれらの条件を満たしながら $6y_1 + 9y_2$ が最も小さくなる y_1, y_2 を求めたい．これは

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 6y_1 + 9y_2 \\ \text{条件} & 3y_1 + 6y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

という線形計画問題になっている．この問題を元の問題の**双対問題** (dual problem) といい，双対問題に対して元の問題のことを**主問題** (primal problem) という．

≫ **双対問題の双対問題**　双対問題が双対問題と呼ばれる所以は，双対問題の双対問題が主問題になることにある．つまり，二回双対をとると元に戻るのだ．このことを，ここまでに導いた双対問題で確認してみよう．標準形に直せば，t_1, t_2 をスラック変数として

$$\begin{aligned} &\text{最大化} && -6y_1 - 9y_2 \\ &\text{条件} && 3y_1 + 6y_2 - t_1 = 2 \\ &&& 2y_1 + 2y_2 - t_2 = 1 \\ &&& y_1, y_2, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

であるから，等式制約をそれぞれ x_1 倍, x_2 倍して足し合わせれば

$$x_1(3y_1 + 6y_2 - t_1) + x_2(2y_1 + 2y_2 - t_2) = 2x_1 + x_2$$

となる．変数ごとに整理すれば

$$(3x_1 + 2x_2)y_1 + (6x_1 + 2x_2)y_2 - x_1t_1 - x_2t_2 = 2x_1 + x_2$$

となるので，目的関数と係数比較すると

$$3x_1 + 2x_2 \geq -6, \quad 6x_1 + 2x_2 \geq -9, \quad -x_1 \geq 0, \quad -x_2 \geq 0$$

ならば

$$-6y_1 - 9y_2 \leq 2x_1 + x_2$$

となることがわかる．この右辺を最小化する問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 2x_1 + x_2 \\ \text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \geq -6 \\ & 6x_1 + 2x_2 \geq -9, \\ & -x_1, -x_2 \geq 0 \end{array}$$

であるが，$-x_1, -x_2$ をそれぞれ x_1, x_2 と置き直せば，確かに主問題である例題 6.1 と一致する．

11.2　弱双対定理

» **標準形の双対問題**　一般の標準形の線形計画問題を考えよう：

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{条件} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ただし，$A \in \mathbf{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$ である．前節の考え方で，この問題の双対問題を作ってみよう．まず，等式制約をそれぞれ y_1 倍，y_2 倍，$\ldots, y_m$ 倍して，それらを足し合わせる．これは等式制約と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$ の内積をとることだとみなせるので，

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

と書ける．この左辺の $\boldsymbol{x}$ の全ての係数が目的関数の係数以上であるという条件は

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A$$

である．両辺の転置をとれば

$$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$$

が条件として得られる．このとき

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

であるので，上界である右辺を最小化せよという問題を書けば（目的関数を転置して）

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{条件} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \end{array}$$

を得る．これが標準形に対する双対問題である．**非負制約 $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ がついていないことに注意せよ．** この双対問題の双対問題が主問題になることを示すのは，行列とベクトルを用いて一般論を展開するちょうどよい練習問題である[余談11.2]．

注意　前節の問題に対しては双対問題にちゃんと非負制約がついていたので，標準形の双対問題に非負制約がつかないのは不思議に思うであろうか．実は，制約条件が全て不等式制約の場合

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{条件} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

には，その双対問題には非負制約がつくのである．なぜならば，標準

形に直すと，$\boldsymbol{s} \in \mathbf{R}^m$ をスラック変数として

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{条件} & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

であるから，さきほどと同様に考えると

$$
\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}
$$

で，これが目的関数以上であるための条件は

$$
A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
$$

である．よって，双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{条件} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

と確かに非負制約がつく[余談11.3]．

≫ **弱双対定理**　双対問題の作り方から，次の定理がただちに得られる[余談11.4]．

定理 11.1（弱双対定理）

二つの線形計画問題のペア

$$
\begin{array}{llll}
\text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \text{最小化} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{条件} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} & \text{条件} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} & &
\end{array}
$$

もしくは

$$
\begin{array}{llll}
\text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \text{最小化} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{条件} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} & \text{条件} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

があるとき，それぞれのペアにおいて前者の問題（主問題）の任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と後者の問題（双対問題）の任意の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

を満たす．したがって，実行可能解が存在するならば最適値についてもこの大小関係が成り立つ．

これからすぐに次が結論できる．

定理 11.2

弱双対定理 11.1 と同じ主問題と双対問題のペアを考える．もしある主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ について

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

が成り立つならば，$\boldsymbol{x}$ は主問題の最適解，$\boldsymbol{y}$ は双対問題の最適解である．

証明　弱双対定理より，主問題の任意の実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ に対して

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{x}} \leq \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

なので，確かに $\boldsymbol{x}$ は主問題の最適解である．双対問題についても同様である．■

この定理は最適解であるための十分条件を述べているだけであり，最適解であれば必ず $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ となるとは主張していないことに注意する．

もう一つ，目的関数の値が上に有界でない場合についても述べておこう．

定理 11.3

弱双対定理 11.1 と同じ主問題と双対問題のペアを考える．もし主問題の目的関数が上に有界でなければ，双対問題に実行可能解は存在しない．同様に，もし双対問題の目的関数が下に有界でなければ，主問題に実行可能解は存在しない．

証明　主問題の目的関数が上に有界でないが双対問題の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ が存在すると仮定すると，弱双対定理より主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ を満たさなければならないが，これは $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ が上に有界でないことに反する．双対問題の双対問題は主問題なので，これで後半についても言えたことになる．■

11.3　強双対定理

≫ 最適値は一致する？　弱双対定理は当たり前の事実を述べただけであるが，では実際に双対問題の最適値を求めると，主問題の最適値に対してどうなっているのだろうか．

まずは今回の冒頭でも扱った例題 6.1 の場合で確認しよう．第 6 回で調べた通り，例題 6.1 の最適解は $(x_1, x_2) = (1, \frac{3}{2})$，最適値は $\frac{7}{2}$ である．双対問題の標準形を再掲すると

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad -6y_1 - 9y_2 \\
&\text{条件} \quad 3y_1 + 6y_2 - t_1 = 2 \\
&\qquad\quad\ 2y_1 + 2y_2 - t_2 = 1 \\
&\qquad\quad\ y_1, y_2, t_1, t_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

二段階シンプレックス法で最適解と最適値を求めよう．

第一段階： 制約条件を -1 倍して，人工変数 $-v$ を加えて $v \ge 0$ を最小化する補助問題を考えれば，その拡大係数行列は

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-3 & -6 & 1 & 0 & \boxed{-1} & -2 \\
-2 & -2 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)
$$

である．右辺値が最小である行にある $(2, 5)$ をピボットに選んで行基

本変形すると

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,5)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -6 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ \hline 3 & 6 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \boxed{4} & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となるから，これにシンプレックス法を適用すると，

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline \boxed{\frac{3}{2}} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

となり，最適値が 0 となったので，これで元の問題の実行可能基底解が一つ求まった．

第二段階：人工変数 v の列を削除し，元の問題の目的関数の係数を第 1 行に入れれば

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boxed{1} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

である．基底変数に対応する $(2,1)$, $(3,2)$ をピボットに選んで行基本変形すれば

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1),\,(3,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \tag{11.1}$$

を得る．こうして双対問題の最適解は $(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$，最適値は $\frac{7}{2}$ であることがわかった．これは主問題の最適値 $\frac{7}{2}$ と一致している！

≫ **強双対定理**　このように，双対問題の目的関数の値は主問題の目的関数の値の上界となるように作ったのだが，この上界の最小値は主問題の目的関数の最大値となっているのである．これは全く自明ではないことに注意する[余談11.5]．実は，例題 6.1 ではたまたまそうなったというわけではなく，一般に線形計画問題の場合は主問題の最適値と双対問題の最適値が一致することが言えるのである[余談11.6]．

定理 11.4（強双対定理）

弱双対定理 11.1 と同じ主問題と双対問題のペアを考える．主問題と双対問題がどちらも実行可能（最適解が存在する）ならば，主問題の最適解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の最適解 $\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

を満たす．

証明　主問題に最適解が存在すれば，線形計画法の基本定理 6.1 より最適解かつ基底解であるものが存在し，その基底変数の選び方に対応して基底行列 $B \in \mathbf{R}^{m\times m}$ と非基底行列 $N \in \mathbf{R}^{m\times(n-m)}$，および目的関数の係数を分けた $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \in \mathbf{R}^{m}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \in \mathbf{R}^{n-m}$ を作ることができる．最小添字規則を用いてシンプレックス法を実行すれば，最適解が存在すれば必ず $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ であるような基底解が得られて終了するので，以下ではこれを満たす最適基底解について議論する[余談11.7]．このとき，主問題の最適値は定理 8.1 より $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}\boldsymbol{b}$ となるのであった．双対問題の目的関数は $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ なので，$\boldsymbol{y} = (B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \in \mathbf{R}^{m}$ とすれば主問題と双対問

題の目的関数の値が一致する．あとはこれが双対問題の制約条件を満たすことが言えれば，定理 11.2 より最適解であることが言える[余談11.8]．

ここでは標準形に対する双対問題を考えると（不等式制約の問題の場合についても標準形の場合に帰着される），制約条件は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix},$$

すなわち

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}, \quad \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$$

と書けるので，$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ を代入して

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \geq \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}, \quad \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \geq \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$$

が成り立つことを示せばよい．$(\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$ に注意すると（なぜか？）[余談11.9]，前者は左辺が $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} = \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ なので明らかに成り立つ．後者は両辺に $-\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$ を加えれば $\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \geq \boldsymbol{0}$ となるが，これはシンプレックス法の終了条件 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ を転置したものに他ならず，確かに満たされる．■

証明の中身も重要で，主問題の最適解かつ基底解であるものに対応して基底行列 $\boldsymbol{B}$ を作ったとき，双対問題の最適解は $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ と書けることがわかったのである（よく読むとわかるように，主問題の最適基底解が退化している場合は，$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$ が双対問題の制約条件を満たさない場合があることに注意）．実は主問題と双対問題の対応関係はここでわかったこと以上に密接なものである．例えば，例題 6.1 の双対問題をシンプレックス法で解いたとき，最後に得られる

拡大係数行列は (11.1) であった．一方で例題 6.1 をシンプレックス法で解くと，最後に得られる拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{7}{2} \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

である．成分を見ると，目的関数の係数と制約条件の右辺の値は当然として，なんと制約条件の係数まで −1 倍すれば一致しそうではないか．次回はこの拡大係数行列の対応関係とその応用について説明する．

11.4　第 11 回の余談

11.1 双対は「そうつい」と読むのが通常である（他方，相対は「そうたい」と読む）．文字通り，二つのものが対になっていることであり，また名詞的にあるものに対して双対の関係にあるものそのもののことを指す．双対なものを作る操作を「双対をとる」という．

「二つのものが対になっている」というのは，互いに表裏の関係にあるというような意味でもあり，したがって双対の双対をとれば元に戻ることが要求される．一番わかりやすいのが行列の転置であり，A と A^{T} は双対の関係にある．特に縦ベクトルと横ベクトルの関係はベクトル空間と双対空間の関係として解釈される．つまり，縦ベクトルをとる線形な関数を表すのが横ベクトルであり，逆に横ベクトルをとる線形な関数を表すのが縦ベクトルであると見ることができる．この見方から，実はベクトルの空間だと思っていたものは関数の空間だと思ってもよいことがわかる．この考え方を一般化していくと，一般の関数空間に辿り着く．

他に，情報学で馴染みの深い例としては，フーリエ変換による信号の時間と周波数の関係が挙げられるだろう．

11.2 答えを書いておこう．既に標準形の双対問題はわかっているので，双対問題を標準形に直すことでこれに帰着する．双対問題の標準形は，$\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^n$ をスラック変数として

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^+ - \boldsymbol{y}^-) \\ \text{条件} & A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}^+ - \boldsymbol{y}^-) - \boldsymbol{t} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y}^+, \boldsymbol{y}^- \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

である．これはブロック行列を用いれば

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^{+} \\ \boldsymbol{y}^{-} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix} \\
&\text{条件} \quad \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & -A^{\mathrm{T}} & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^{+} \\ \boldsymbol{y}^{-} \\ \boldsymbol{t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{c} \\
&\qquad \boldsymbol{y}^{+}, \boldsymbol{y}^{-} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

と書けるので，双対問題の双対問題は

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
&\text{条件} \quad \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_n \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{pmatrix} -\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である．制約条件は $A\boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{b}, -A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, -\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ を意味し，前の二つは $-A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と等価なので，最小化を最大化に直して $-\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}$ と置き直せば，確かに主問題が得られる．

11.3 このように，制約条件が全て不等式制約である場合の主問題と双対問題はとても綺麗な対応関係となっている．そこで，これらの問題を特に不等式標準形と呼ぶことがある．等式標準形の不等式標準形への変換は $a = b$ が $a \leq b$ かつ $a \geq b$ と等価であることを用いれば可能であるが，これは双対問題側で非負制約がない変数 y を $y^{+} - y^{-}$ に置き換えて非負制約をつけることと対応する．

11.4 たとえ双対問題の作り方を知らなかったとしても，制約条件を使えば弱双対定理の証明は容易である．$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ に注意して，

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq (A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

11.5 双対問題は主問題の制約条件の線形結合で上界を作っているが，証明なしではこの方法で作った上界の最小値が上界全体の最小値であるという保証はない．

実際，非線形計画問題に対してもラグランジュ双対関数というものを用いて双対問題を作ることができるが，無条件では強双対定理は成り立たない．例えば，強双対性の十分条件として「凸計画問題でかつ実行可能内点が存在する（スレーター条件）」が知られているが，スレーター条件を外すと（あまり普通の問題でないが）主問題の最適値と双対問題の最適値が一致しない例を作ることができる．

11.6 双対性という概念自体は，線形不等式の理論として 20 世紀のはじめには Farkas などによる研究で知られており，今では線形計画法の文脈で Farkas の補題として参照されることがある．双対定理の歴史については，再びダンツィーグによる回想

G. B. Dantzig, *Reminiscences about the Origins of Linear Programming*, Technical Report SOL 81-5, Dept. of Operations Research, Stanford University, 1981.
`https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA112060`
が参考になる．1947 年 10 月，シンプレックス法を発明したばかりのダンツィーグは，当時世界最高の数学者とみなされていたフォン・ノイマンの助言を受けようとプリンストンへ赴いた．今では 20 世紀科学の最重要人物とも言われる John von Neumann (1903–1957) は，数学基礎論，ゲーム理論，量子力学の数学的理論，計算機科学の基礎（コンピュータのプログラム内蔵方式，セル・オートマトンの理論，マージソートの考案）など多岐に渡る分野に業績がある一方，その時代背景からアメリカの核兵器の開発に加担したという暗い話もある．ノイマンはとにかく頭が切れて，最初期の電子コンピュータよりも計算が速かったといった数々の逸話が残る人物であり，ダンツィーグが訪れた際も問題を黒板に書いたわずか 1 分ほどでノイマンは「それだ！」と立ち上がると，1 時間 30 分にわたる線形計画の数学的理論の講義を始めたという．ダンツィーグはあっけにとられたが，ノイマン曰くこれは手品などではなくて，最近研究していたゲーム理論における予想を君の問題に当てはめただけだということであった．それは今ではミニマックス定理として知られるもので，その線形な場合は次のように書ける：$X \subset \mathbf{R}^n$ と $Y \subset \mathbf{R}^m$ を有界閉凸集合とすると，$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対して

$$\min_{\boldsymbol{y}\in Y}\max_{\boldsymbol{x}\in X} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x} = \max_{\boldsymbol{x}\in X}\min_{\boldsymbol{y}\in Y} \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．つまり，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x}$ について，各 $\boldsymbol{y}$ ごとに最大値を与えるように $\boldsymbol{x}$ を決めてから $\boldsymbol{y}$ について最小化するのと，各 $\boldsymbol{x}$ ごとに最小値を与えるように $\boldsymbol{y}$ を決めてから $\boldsymbol{x}$ について最大化するのでは同じ結果が得られる．これを聞いて初めて双対性という概念を知ったダンツィーグは，1948 年 1 月に「線形不等式についての定理」という，双対定理の厳密な証明を含む報告を書いたが，これはノイマンが概略を示したものを自分なりに書き上げただけだとして，論文にして出版することはなかった．現在では双対定理の発案者はノイマンで，最初に厳密な証明を与えたのは Gale, Kuhn, Tucker の 1951 年の論文であるとされている．

11.7 例題 9.2 で見たように，退化している場合は最適基底解であっても $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ とは限らないことに注意する．つまり，定理 8.1 は実は必要十分条件ではなかったのだ．

11.8 定理 11.2 の逆を言おうとしているのに定理 11.2 を使うのは循環論法っぽい雰囲気もあるが，片方の問題に最適解があればもう片方の問題にも対応する最適解が必ずあるという事実をまず言って，それらは作り方から最適値が一致するということを示していると読むべきだろう．ここで構成した以外の双対問題の最適解があったとしても，全ての最適解で目的関数の値は一致しなければならないので，これでどんな最適解の組を持ってきても最適値が一致することが言えたことになっている．

11.9 これも答えを書いておくと，$(B^{-1})^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}})^{-1}$ を示すには $(B^{-1})^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} = I_m$ であることを言えばよい．これは左辺を転置すれば $BB^{-1} = I_m$ がわかるので，確かに正しい．つまり，転置をとる操作と逆行列をとる操作は可換である．これより，$(B^{-1})^{\mathrm{T}} = (B^{\mathrm{T}})^{-1}$ のこと

を $B^{-\mathrm{T}}$ と書くことがある.

第 12 回　相補性定理と双対シンプレックス法

主問題と双対問題の間の関係をさらに考察すると，両者の拡大係数行列の間には一対一の対応関係があることがわかり，両者の最適性の必要十分条件として相補性条件というものが導かれる．この対応関係を利用して，もし主問題の初期実行可能基底解が見つかっていなくても，双対問題の初期実行可能基底解が見つかっていれば，双対問題をシンプレックス法で解くことで（もしくは双対問題と同じピボットを主問題で選ぶシンプレックス法を実行することで）主問題の最適解を得る双対シンプレックス法を説明する．

12.1　主問題と双対問題の拡大係数行列の対応

例題 6.4 を再度考えよう：

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\
\text{条件} & 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 6 \\
 & 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 12 \\
 & x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{array}
$$

この問題の双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 6y_1 + 12y_2 \\
\text{条件} & 2y_1 + 6y_2 \ge 3 \\
 & 3y_1 + 3y_2 \ge 2 \\
 & 6y_1 + 2y_2 \ge 5 \\
 & y_1, y_2 \ge 0
\end{array}
$$

である．

まず，主問題を最大係数規則のシンプレックス法で解こう．標準形は

$$\begin{aligned} &\text{最大化} \quad 3x_1+2x_2+5x_3 \\ &\text{条件} \quad 2x_1+3x_2+6x_3+s_1=6 \\ &\qquad\quad 6x_1+3x_2+2x_3+s_2=12 \\ &\qquad\quad x_1,x_2,x_3,s_1,s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

だから，

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 3 & \boxed{6} & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,3)\ \text{をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{4}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 5 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{6} & 0 & 1 \\ \boxed{\frac{16}{3}} & 2 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\ \text{をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{15}{2} \\ \hline 0 & \frac{3}{8} & 1 & \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{15}{8} \end{array}\right)$$

となる．最適解は（スラック変数も書くと）$(x_1,x_2,x_3,s_1,s_2)=(\frac{15}{8},0,\frac{3}{8},0,0)$，最適値は $\frac{15}{2}$ である．

これに対応する双対問題側の変形は次のようになる．まず，標準形を書くと

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & -6y_1 - 12y_2 \\
\text{条件}\quad & t_1 - 2y_1 - 6y_2 = -3 \\
& t_2 - 3y_1 - 3y_2 = -2 \\
& t_3 - 6y_1 - 2y_2 = -5 \\
& t_1, t_2, t_3, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

となる．ここで，対応をつけるためにスラック変数を先に書いて，制約条件を -1 倍した．拡大係数行列もスラック変数を先にして t_1, t_2, t_3, y_1, y_2 の順で列を並べることにすると，次のように変形される．

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ \hline
1 & 0 & 0 & -2 & -6 & -3 \\
0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -2 \\
0 & 0 & 1 & -6 & -2 & -5
\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,4)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 1 & 0 & 10 & -5 \\ \hline
1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{16}{3} & -\frac{4}{3} \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & -\frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{6}
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,5)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\frac{15}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & -\frac{15}{2} \\ \hline
-\frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 1 & \frac{1}{4} \\
-\frac{3}{8} & 1 & -\frac{3}{8} & 0 & 0 & 1 \\
\frac{1}{16} & 0 & -\frac{3}{16} & 1 & 0 & \frac{3}{4}
\end{array}\right)
$$

ピボット選択規則が謎だと思うが，最後の行列を見ると実行可能基底解が得られておりかつ最適性条件も満たされているから，最適解は $(t_1, t_2, t_3, y_1, y_2) = (0, 1, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$，最適値は $\frac{15}{2}$ であることがわかった．目的関数の係数を見ると，t_1 の列が $\frac{15}{8}$，t_3 の列が $\frac{3}{8}$ となっているが，これは主問題の最適解で $x_1 = \frac{15}{8}$, $x_3 = \frac{3}{8}$ であったことに対応してい

る．また，主問題に戻って目的関数の係数を見ると，x_2 の列が 1，s_2 の列が $\frac{3}{4}$，s_3 の列が $\frac{1}{4}$ となっていたが，これも双対問題の最適解と対応している．

この変形の過程を前のページの主問題の変形過程と見比べていただきたい．左下・右上ブロックは -1 倍されているが同じ値が出てきていて，左上・右下ブロックも全く同じ値で対応していることに気づく．ただし，どの行をピボットに選んだかによって順番は入れ替わりがあるようだ．

実は，双対問題の方のピボット選択は，主問題で選んだピボットに対応する成分を選んでいるだけである．このとき，基底変数と非基底変数の対応関係が次のように変わっていくのである（次の段階で入れ替えられる変数に下線を引いた）：

主問題		双対問題	
非基底：$x_1, x_2, \underline{x_3}$	基底：$\underline{s_1}, s_2$	基底：$t_1, t_2, \underline{t_3}$	非基底：$\underline{y_1}, y_2$
→非基底：$\underline{x_1}, x_2, s_1$	基底：$x_3, \underline{s_2}$	→基底：$\underline{t_1}, t_2, y_1$	非基底：$t_3, \underline{y_2}$
→非基底：s_2, x_2, s_1	基底：x_3, x_1	→基底：y_2, t_2, y_1	非基底：t_3, t_1

一般論を展開してみよう．主問題が

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} && \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
&\text{条件} && \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& && \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

であるとする．ただし，$A \in \mathbf{R}^{m \times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$ である．スラック変数 $\boldsymbol{s} \in \mathbf{R}^m$ を導入して

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{条件} & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

と標準形を書く．決定変数のベクトル $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix}$ を基底変数と非基底変数で分けて並べ替え $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}$ と置き直し，対応して制約条件の係数行列 $\begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$，目的関数の係数ベクトル $\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ もそれぞれ $\begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}$ とする．ただし，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{x}_{\mathrm{N}}, \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \in \mathbf{R}^n, B \in \mathbf{R}^{m \times m}, N \in \mathbf{R}^{m \times n}$ である．これに合わせて拡大係数行列を行基本変形すると，第 8 回で見たように

$$
\left(\begin{array}{cc|c}
\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N & \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} \boldsymbol{b} \\
\hline
I_m & B^{-1} N & B^{-1} \boldsymbol{b}
\end{array}\right) \tag{12.1}
$$

となるのであった．

一方，双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{条件} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

である．ここで $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^m$．あとで主問題側で $\begin{pmatrix} A & I_m \end{pmatrix}$ の列を並べ替えて $\begin{pmatrix} B & N \end{pmatrix}$ としたのと同様の並べ替えを双対問題側でしたいので，そ

のためには制約条件 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ を合わせて $\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ I_m \end{pmatrix}\boldsymbol{y} \geq \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ と書く．そのうえでスラック変数 $\boldsymbol{t} \in \mathbf{R}^n, \tilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbf{R}^m$ を導入して，問題を

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{条件} & \boldsymbol{t} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{c} \\
 & \tilde{\boldsymbol{y}} - I_m\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \\
 & \boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

と書き直そう．条件 $\tilde{\boldsymbol{y}} - I_m\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は結局 $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}$ ということなので，$\boldsymbol{y}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ の役割を入れ替えて問題をさらに

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} \\
\text{条件} & \boldsymbol{t} - A^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{y} - I_m\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0} \\
 & \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

と書き直す．こうしたうえで，$\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} \\ I_m \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} B^{\mathrm{T}} \\ N^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ と並べ替えるのに合わせて，決定変数 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ も，等式制約を

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}} - B^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}, \\
&\boldsymbol{y}_{\mathrm{N}} - N^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{y}} = -\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}
\end{aligned}
$$

と書けるように $\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix}$ と並べ替える．ただし，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{y}_{\mathrm{N}} \in \mathbf{R}^n$ であり，双対問題側では $\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}}$ が非基底変数，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{N}}$ が基底変数になるはずであ

ることに注意する．この問題を表す拡大係数行列を，変数を $\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}}, \boldsymbol{y}_{\mathrm{N}}, \tilde{\boldsymbol{y}}$ の順で書けば，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \hline I_m & O & -B^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ O & I_n & -N^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{array}\right)$$

となる．

主問題に対応して，ブロック $-B^{\mathrm{T}}$ の対角成分をピボットに選ぶ行基本変形を実行しよう[余談12.1]．まずブロック $-B^{\mathrm{T}}$ を I_m にするための行基本変形を，$1+m+n$ 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & -(B^{\mathrm{T}})^{-1} & O \\ \boldsymbol{0} & O & I_n \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列に左からかけることで計算すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \\ \hline -(B^{\mathrm{T}})^{-1} & O & I_m & (B^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ O & I_n & -N^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{array}\right)$$

となる．次にブロック $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}, -N^{\mathrm{T}}$ を消去するための行基本変形を，$1+m+n$ 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & I_m & O \\ \boldsymbol{0} & N^{\mathrm{T}} & I_n \end{pmatrix}$$

を拡大係数行列に左からかけることで計算すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{-1} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ \hline -(B^{\mathrm{T}})^{-1} & O & I_m & (B^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ -N^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{-1} & I_n & O & N^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{array}\right)$$

となる．$(B^{\mathrm{T}})^{-1} = (B^{-1})^{\mathrm{T}}$ と $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = (BA)^{\mathrm{T}}$ を用いると，これは

$$\left(\begin{array}{ccc|c} (B^{-1}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline -(B^{-1})^{\mathrm{T}} & O & I_m & (B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ -(B^{-1}N)^{\mathrm{T}} & I_n & O & (\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}N)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{array}\right)$$

と書き直される．ここで，第 2 行から第 $m+1$ 行は

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = (B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}} + (B^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$$

という $\tilde{\boldsymbol{y}}$ を決定する式を表しているが，元々 $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}$ がわかっていること，他の行の $\tilde{\boldsymbol{y}}$ の係数は全て $\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ であることから，この部分と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ はなくても依然として元の問題と等価である．そこで，これらの行と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ の係数の列を削除した拡大係数行列を書くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} (B^{-1}\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline -(B^{-1}N)^{\mathrm{T}} & I_n & (\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}N)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \end{array}\right)$$

となる．これを見ると，双対問題の標準形において $\boldsymbol{y}_{\mathrm{N}}$ を基底変数に選んで行基本変形した結果を表しているに他ならないことがわかるが，主問題で $\boldsymbol{x}_{\mathrm{B}}$ を基底変数に選んで行基本変形した結果の拡大係数行列 (12.1) と見比べると，確かに同じ成分が現れていることがわかる．これが示したい対応関係であった[余談12.2]．

12.2　相補性定理

主問題と双対問題では基底変数と非基底変数が相互に対応することがわかったが，この対応関係を用いて最適性の必要十分条件を述べるのが**相補性定理** (complementarity theorem) であり，双対定理の言い換えとなっている．

定理 12.1（不等式制約の場合の相補性定理）

二つの線形計画問題のペア

$$\begin{array}{lll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{条件} & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{最小化} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{条件} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

があるとする．これらを標準形に直して

$$\begin{array}{lll} \text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{条件} & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{最大化} & -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\ \text{条件} & \boldsymbol{t} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

としたとき，それぞれの実行可能解 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{s} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$ がそれぞれの最適解であるための必要十分条件は

$$
\begin{aligned}
&A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}, \\
&\boldsymbol{t} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{c}, \\
&x_j t_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\
&s_i y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\
&\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

が全て満たされることである．

証明　それぞれの問題の制約条件に加えて $x_j t_j = 0$, $s_i y_i = 0$ が満たされることが最適解であるための必要十分条件であることを言えばよい．弱双対定理 11.1 と強双対定理 11.4 より，

$$
\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}
$$

は最適解であるための必要十分条件である．制約条件より，これは

$$
(-\boldsymbol{t} + A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},
$$

展開して $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ を消去すれば

$$
-\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},
$$

つまり

$$
-x_1 t_1 - x_2 t_2 - \cdots - x_n t_n = s_1 y_1 + s_2 y_2 + \cdots + s_m y_m
$$

と同値であるが，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ より，左辺は非正，右辺は非負であり，等号が成立するには両辺が 0 になるほかない．したがって，この等式に現れた項は全て 0 でなければならない．■

一般に，$x_i t_i = 0$ のように二つの関数の積が 0 になるという形の条件のことを**相補性条件** (complementarity condition) という．これは片方が 0 でなければもう片方は 0 であることを要求する条件であり，非線形計画法においても重要な役割を果たす．線形計画法においては，片方の問題のある変数が基底変数であれば，もう片方の問題の対応する変数は非基底変数であることを要求する条件となっている．相補性定理は第 14 回で説明する内点法を構成するうえで重要な役割を果たす．

標準形の場合の相補性定理も述べておく．証明はほぼ同じである．

定理 12.2（標準形の場合の相補性定理）

二つの線形計画問題のペア

最大化	$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$	最小化	$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$
条件	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$	条件	$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}$
	$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$		

があるとする．それぞれの実行可能解 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ がそれぞれの最適解であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}$ を A の第 i 行として

$$
\begin{aligned}
&A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\\
&A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c},\\
&(b_i - \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\\
&\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

が全て満たされることである．

12.3　双対シンプレックス法

今回の最初の例で見たように，主問題でピボットを選んで行基本変形すると，双対問題でも対応する同じ成分をピボットに選んだ行基本変形が引き起こされる．そこで，次のような発想が生まれる：もし主問題の実行可能基底解が得られていなくても，双対問題の実行可能基底解に対応する基底解が得られていれば，双対問題でシンプレックス法を実行し，双対問題が解ければ得られた最適値が主問題の最適値であり，そのときの目的関数の非基底変数の係数を読み取れば主問題の最適解もわかる．このように，主問題の基底解に対応する双対問題の基底解が実行可能であるとき，これを**双対実行可能基底解** (dual feasible basic solution) といい，最初に双対実行可能基底解が得られている場合に双対問題側をシンプレックス法で解く方法を**双対シンプレックス法** (dual simplex method) という[余談12.3]．具体例で見てみよう．

例題 12.1

次の線形計画問題の最適解と最適値を求めよ.

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 7x_1 + 2x_2 \\
\text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
& 6x_1 + 2x_2 \geq 9 \\
& 4x_1 + x_2 \geq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

解答　この問題を標準形に書き直しても初期実行可能基底解は得られないが，双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 6y_1 + 9y_2 + 5y_3 \\
\text{条件} & 3y_1 + 6y_2 + 4y_3 \leq 7 \\
& 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

であり，その標準形はスラック変数 t_1, t_2 を導入して

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 6y_1 + 9y_2 + 5y_3 \\
\text{条件} & t_1 + 3y_1 + 6y_2 + 4y_3 = 7 \\
& t_2 + 2y_1 + 2y_2 + y_3 = 2 \\
& t_1, t_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

であるから，双対問題側は実行可能基底解が得られている．シンプレックス法を最大係数規則で適用すると

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -6 & -9 & -5 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 6 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & \boxed{2} & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,4)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & \frac{9}{2} & 3 & 0 & -\frac{1}{2} & 9 \\ \hline 1 & -3 & -3 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,5)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{19}{2} \\ \hline 1 & -3 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

となる．これより，目的関数の行（第 1 行）を読むことで，元の問題の最適解は $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, 3)$，最適値 $\frac{19}{2}$ であることがわかった． ■

12.4 第 12 回の余談

12.1 主問題の基底変数，非基底変数が双対問題の非基底変数，基底変数とそれぞれ対応するからくりはこの行基本変形から理解できそうである．$\tilde{\boldsymbol{y}}$ を導入した問題の書き換えによって，まず $2m+n$ 個の決定変数を持つこの問題では，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}}$ と $\boldsymbol{y}_{\mathrm{N}}$ を（つまり $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{y}$ を）基底変数，$\tilde{\boldsymbol{y}}$ を非基底変数とする基底解

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{N}} \\ \tilde{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \\ -\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

が得られた状態となっている．あとの計算を見ると，ブロック $-B^{\mathrm{T}}$ の対角成分をピボットに選んで行基本変形をすることで，基底変数 $\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}}$ と非基底変数 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ の取り替えが起こり，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{N}}$ と $\tilde{\boldsymbol{y}}$ を基底変数，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}}$ を非基底変数とする基底解

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_{\mathrm{B}} \\ \boldsymbol{y}_{\mathrm{N}} \\ \tilde{\boldsymbol{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1} N)^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \\ (B^{-1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}$$

が得られることがわかる．元々 $\tilde{\boldsymbol{y}}$ はなくてもよいスラック変数だったので，これを無視すれば，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{B}}$ を非基底変数，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{N}}$ を基底変数とする基底解が得られたことになる．

12.2 議論が抽象的でわかりづらいと思われる場合は，拡大係数行列の適当な成分表示を仮定して，適当にピボットを選んで行基本変形したときに，主問題と双対問題がそれぞれどのように変形されるか具体的に計算してみるとよいだろう．

12.3 本当は双対シンプレックス法というと，双対問題側のシンプレックス法で選ぶべきピボットに対応する主問題側の成分をピボットに選んで変形していく方法を指すことが多いが，このテキストでは主問題と双対問題の対応関係を強調したいのでこのように説明してみた．他の文献を読むときは注意．

第 13 回　感度分析と再最適化

一度線形計画問題を解いたあと，ある条件を少し変えたときに最適解や最適値がどれぐらい変わるか知りたい，ある条件を大きく変えたときに新しい最適解を求めたいという要求は実際の応用の場面ではよくあることである．シンプレックス法を利用して，この要求に答える方法について説明する．

13.1　目的関数の係数の変更

先に再最適化の話から始めよう．第 1 回で学んだ生産計画問題に取り組む．以下は例題 1.3 の数字を少し変えたものである．

例題 13.1

ある工場ではしろくまのぬいぐるみとあざらしのぬいぐるみを作っている．

- しろくまのぬいぐるみが 1 個売れると 2000 円の利益，あざらしのぬいぐるみが 1 個売れると 750 円の利益が出る．
- しろくまのぬいぐるみを 1 個作るには生地が 200 g，綿が 900 g 必要．
- あざらしのぬいぐるみを 1 個作るには生地が 100 g，綿が 200 g 必要．
- 今，工場に生地が 10000 g，綿が 40000 g ある．

作ったぬいぐるみは全て売れるとすると，利益を最大にするためにはしろくまのぬいぐるみとあざらしのぬいぐるみをそれぞれ何個ずつ作ればよいか．

解答　問題は，x_1 をしろくまのぬいぐるみの個数，x_2 をあざらしのぬいぐるみの個数として

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 2000x_1 + 750x_2 \\ \text{条件} & 200x_1 + 100x_2 \leq 10000 \\ & 900x_1 + 200x_2 \leq 40000 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

と書ける．標準形は，スラック変数 s_1, s_2 を導入して

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 2000x_1 + 750x_2 \\ \text{条件} & 200x_1 + 100x_2 + s_1 = 10000 \\ & 900x_1 + 200x_2 + s_2 = 40000 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

なので，シンプレックス法を最大係数規則で適用すると

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2000 & -750 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 200 & 100 & 1 & 0 & 10000 \\ \boxed{900} & 200 & 0 & 1 & 40000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -\frac{2750}{9} & 0 & \frac{20}{9} & \frac{800000}{9} \\ \hline 0 & \boxed{\frac{500}{9}} & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{10000}{9} \\ 1 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{900} & \frac{400}{9} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \frac{11}{2} & 1 & 95000 \\ \hline 0 & 1 & \frac{9}{500} & -\frac{1}{250} & 20 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{250} & \frac{1}{500} & 40 \end{array}\right)$$

となる．よって，しろくまのぬいぐるみを 40 個，あざらしのぬいぐるみを 20 個作れば利益が 95000 円で最大になることがわかった．

■

≫ **再最適化**　しろくまのぬいぐるみは大人気なので，販売価格を 1000 円上げて，1 個あたり 3000 円の利益としてしまっても全部売れるという状況を考えよう．このとき，最適解と最適値はどう変化するか．これは単純に目的関数に $1000x_1$ を加えることを意味するので，左辺にもっていけば最後に得られた拡大係数行列を

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1000 & 0 & \frac{11}{2} & 1 & 95000 \\ \hline 0 & 1 & \frac{9}{500} & -\frac{1}{250} & 20 \\ \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{250} & \frac{1}{500} & 40 \end{array}\right)$$

と変更して，シンプレックス法を実行すればよい．$(3,1)$ をピボットとして行基本変形すると，

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \frac{3}{2} & 3 & 135000 \\ \hline 0 & 1 & \frac{9}{500} & -\frac{1}{250} & 20 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{250} & \frac{1}{500} & 40 \end{array}\right)$$

となり，作る個数は変えなくても 135000 円の利益で最大となることがわかる．

調子に乗って，さらに販売価格を 1000 円上げて，1 個あたり 4000 円の利益としてしまったが，それでも全部売れてしまうとしよう．さ

らに目的関数に $1000x_1$ を加えてシンプレックス法を実行すると，

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
-1000 & 0 & \frac{3}{2} & 3 & 135000 \\
\hline
0 & 1 & \frac{9}{500} & -\frac{1}{250} & 20 \\
1 & 0 & -\frac{1}{250} & \frac{1}{500} & 40
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,1)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & -\frac{5}{2} & 5 & 175000 \\
\hline
0 & 1 & \frac{9}{500} & -\frac{1}{250} & 20 \\
1 & 0 & -\frac{1}{250} & \frac{1}{500} & 40
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,3)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
0 & \frac{1250}{9} & 0 & \frac{40}{9} & \frac{1600000}{9} \\
\hline
0 & \frac{500}{9} & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{10000}{9} \\
1 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{1}{900} & \frac{400}{9}
\end{array}\right)
$$

と，今度は最適解が変化した．しろくまのぬいぐるみ 1 個の利益があざらしのぬいぐるみ 1 個の利益に比べてずっと大きくなったので，あざらしのぬいぐるみを作る分の材料もしろくまのぬいぐるみにしてしまった方が利益が大きくなるわけである．個数は整数なので（整数計画問題については第 15 回で改めて述べる），$\frac{400}{9} = 44.444\ldots$ より，しろくまのぬいぐるみを 44 個作れば，生地の残量が $10000 - 44 \times 200 = 1200$ g，綿の残量が $40000 - 44 \times 900 = 400$ g となるので，あとあざらしのぬいぐるみを 2 個作ることができる．このときの利益は $4000 \times 44 + 750 \times 2 = 177500$ 円で最大になることがわかる[余談13.1]．

このように，一度最適解が得られた問題に対して，目的関数や制約条件を少し変更したときに新たな最適解をシンプレックス法の少しの手間で得ることを**再最適化** (reoptimization) という．

13.2　感度分析

≫ **目的関数の係数の感度分析**　一般に，目的関数 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ の係数 $\boldsymbol{c}$ の，最適解を与える基底変数に対応するベクトルを $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$，非基底変数に対応するベクトルを $\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$ とし，基底行列を B，非基底変数を N とする．今，定理 8.1 で述べた最適性の条件 $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}N-\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ が成り立っているとしよう．目的関数の係数を $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} \to \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}+\Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}$, $\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \to \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}+\Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$ と変えたとすると，変更後も最適性の条件が満たされるためには $(\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}+\Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}})^{\mathrm{T}}B^{-1}N-(\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}+\Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}})^{\mathrm{T}} \geq \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ が必要であるから，整理して全体を転置すると

$$-(B^{-1}N)^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}+\Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} \leq (B^{-1}N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}-\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$$

が変化量 $\Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}, \Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$ が満たすべき条件となる．また，この条件を満たしているとき，最適値は $\Delta\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}\boldsymbol{b}$ だけ変化することになる．このような分析を**感度分析** (sensitivity analysis) という．

例題 13.2

例題 13.1 でしろくまのぬいぐるみ 1 個の利益を $2000+\Delta c_1$ 円，あざらしのぬいぐるみ 1 個の利益を $750+\Delta c_2$ 円と変更することを考える．

(i) 最適解が元の問題と変わらないために $\Delta c_1, \Delta c_2$ が満たすべき条件を求めよ．また，この条件を満たしているとき，利益の変化量を $\Delta c_1, \Delta c_2$ を用いて表せ．

(ii) $\Delta c_2 = 0$ とするとき，(i) の条件を満たす Δc_1 の最大値を求めよ．

解答　(i) 最適解における基底変数は x_2, x_1 であり，

$$B = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 200 & 900 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}N = \frac{1}{500}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 750 \\ 2000 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} = \mathbf{0},$$

および

$$(B^{-1}N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので（B は最初の拡大係数行列，$B^{-1}N$ と $(B^{-1}N)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}} - \boldsymbol{c}_{\mathrm{N}}$ はシンプレックス法の実行後の拡大係数行列から読み取れることに注意），条件は

$$-\frac{1}{500}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varDelta c_2 \\ \varDelta c_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．また，利益の変化量は

$$\varDelta \boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}} B^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \varDelta c_2 & \varDelta c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} = 40\varDelta c_1 + 20\varDelta c_2$$

となる．

(ii) $\varDelta c_2 = 0$ のとき，条件は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{250} \\ -\frac{1}{500} \end{pmatrix}\varDelta c_1 \leq \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．これを満たす $\varDelta c_1$ の最大値は $250 \cdot \frac{11}{2} = 1375$ である．つまり，しろくまのぬいぐるみ 1 個の利益が 3375 円までは上げても最適解は変化しない．■

≫ **制約条件の右辺値の感度分析**　一般に，今度は制約条件の右辺値を $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$ に変更した場合を考えよう．このとき，シンプレックス法実行後の右辺値（最適解）は $B^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})$ に変化する．したがって，変更後も同じ基底変数で最適性の条件が満たされる（実行可能である）ためには $B^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}) \geq \boldsymbol{0}$ が必要であるから，整理すると

$$B^{-1}\Delta\boldsymbol{b} \geq -B^{-1}\boldsymbol{b}$$

が $\Delta\boldsymbol{b}$ の満たすべき条件となる．また，この条件を満たしているとき，最適解は $B^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$，最適値は $\boldsymbol{c}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{T}}B^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$ だけ変化することになる．

例題 13.3

例題 13.1 で生地の量を $10000 + \Delta b_1$ g に，綿の量を $40000 + \Delta b_2$ g に変更することを考える．

(i) 最適解の基底変数が元の問題と変わらないために $\Delta b_1, \Delta b_2$ が満たすべき条件を求めよ．また，この条件を満たしているとき，利益の変化量を $\Delta b_1, \Delta b_2$ を用いて表せ．

(ii) $\Delta b_1 = 0$ とするとき，(i) の条件を満たす Δb_2 の範囲を求めよ．

解答　(i) 最適解における基底変数は x_2, x_1 であり，

$$B = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 200 & 900 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{500}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

であるから，条件は

$$\frac{1}{500}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，利益の変化量は

$$\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}} B^{-1} \Delta \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix} = \frac{11}{2} \Delta b_1 + \Delta b_2$$

となる．

(ii) $\Delta b_1 = 0$ とすると，条件は

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{250} \\ \frac{1}{500} \end{pmatrix} \Delta b_2 \geq \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \end{pmatrix}$$

となるから，これを満たす Δb_2 の範囲は $500 \cdot (-40) \leq \Delta b_2 \leq (-250) \cdot (-20)$，つまり $-20000 \leq \Delta b_2 \leq 5000$ である． ■

≫ **制約条件の左辺の係数の感度分析**　制約条件の左辺の係数行列 A についても同様に分析できるが，一般には基底行列 B と非基底行列 N がともに変更になるうえ，最適性条件と解の非負制約両方のチェックが必要になるため，より煩雑である．ここではこれ以上は扱わない．

13.3　制約条件の変更

≫ **制約条件の右辺値変更時の再最適化**　感度分析でわかった範囲を超えて右辺値を変更した場合，右辺値に負の値が現れてしまうので，このまま再最適化をしようとすると二段階シンプレックス法が必要になってしまう．ところが，双対問題側を見ると，右辺値は変わらないので実行可能なままであり，目的関数の係数だけが変わることになる．したがって，双対シンプレックス法を実行すれば容易に再最適化することができる．ここで述べていることの意味がわからなければ第 12 回を復習すること．

例題 13.4

例題 13.1 で綿の量が 10000 g になったとき，利益を最大にするにはしろくまのぬいぐるみとあざらしのぬいぐるみをそれぞれ何個ずつ作ればよいか．

解答　まず，元の問題の双対問題の標準形は

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad -10000y_1 - 40000y_2 \\
&\text{条件} \quad t_1 - 200y_1 - 900y_2 = -2000 \\
&\qquad\quad t_2 - 100y_1 - 200y_2 = -750 \\
&\qquad\quad t_1, t_2, y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

である．例題 13.1 の結果より，双対問題の最適解は $(t_1, t_2, y_1, y_2) = (0, 0, \frac{11}{2}, 1)$ であり，これに対応する拡大係数行列は

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
40 & 20 & 0 & 0 & -95000 \\
\hline
\frac{1}{250} & -\frac{9}{500} & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\
-\frac{1}{500} & \frac{1}{250} & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

である[余談13.2]．主問題で綿の量 40000 g を 10000 g に 30000 g 減らすことは，双対問題の標準形の目的関数に $30000y_2$ を加えることに対応するので，拡大係数行列は

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
40 & 20 & 0 & -30000 & -95000 \\
\hline
\frac{1}{250} & -\frac{9}{500} & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\
-\frac{1}{500} & \frac{1}{250} & 0 & \boxed{1} & 1
\end{array}\right)
$$

と変わる．$(3,4)$ をピボットに選んで行基本変形すれば

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,4)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} -20 & 140 & 0 & 0 & -65000 \\ \hline \boxed{\frac{1}{250}} & -\frac{9}{500} & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ -\frac{1}{500} & \frac{1}{250} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

となる．シンプレックス法を適用し，$(2,1)$ をピボットに選んで行基本変形すれば，

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 50 & 5000 & 0 & -37500 \\ \hline 1 & -\frac{9}{2} & 250 & 0 & 1375 \\ 0 & -\frac{1}{200} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{15}{4} \end{array}\right)$$

となる．これで最適解が得られたので，主問題の最適解を第 1 行から読み取れば，しろくまのぬいぐるみを 0 個，あざらしのぬいぐるみを 50 個作る時に利益が 37500 円で最大になることがわかる．スラック変数 s_1 が基底変数に選ばれていることから，綿の量に対して生地の量が多すぎて余ってしまっていることがわかる． ■

≫ **制約条件の左辺の係数の変更時の再最適化**　制約条件の左辺の係数を一部変更した場合，シンプレックス法の実行後の拡大係数行列を少し変更する程度では済まないため，通常のシンプレックス法の場合はもう一度最初から実行しなおす必要がある．再開するために選ぶべきピボットが既にわかっているとはいえ，少し手間がかかることになる．一方，第 8 回で扱った改訂シンプレックス法を使う場合は，変更された部分を修正するだけで再開することが可能であろう．このことについては，ここではこれ以上は扱わない．

≫ **制約条件の追加**　単に制約条件が増えた場合は，その条件をシンプレックス法実行後に得られた拡大係数行列に追加して再最適化すれ

ばよい.

例題 13.5

例題 13.1 において，職人が丁寧に作るのでしろくまのぬいぐるみは時間的に最大でも 30 個しか作れないという制約が追加されたとすると，利益を最大にするためにはしろくまのぬいぐるみとあざらしのぬいぐるみをそれぞれ何個ずつ作ればよいか.

解答　例題 13.1 の最後に得られた拡大係数行列に，スラック変数 s_3 の列を追加したうえで，制約条件 $x_1 + s_3 = 30$ を追加すると，

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \frac{11}{2} & 1 & 0 & 95000 \\ \hline 0 & 1 & \frac{9}{500} & -\frac{1}{250} & 0 & 20 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{250} & \boxed{\frac{1}{500}} & 0 & 40 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

となる．第 3 行からピボットが選ばれていないので，とりあえず $(3,4)$ をピボットに選んで行基本変形すると，

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,4)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} -500 & 0 & \frac{15}{2} & 0 & 0 & 75000 \\ \hline 2 & 1 & \frac{1}{100} & 0 & 0 & 100 \\ 500 & 0 & -2 & 1 & 0 & 20000 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

となる．シンプレックス法を適用し，$(4,1)$ をピボットに選んで行基本変形すると，

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(4,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 & 500 & 90000 \\ \hline 0 & 1 & \frac{1}{100} & 0 & -2 & 40 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -500 & 5000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right)$$

となる．これより，しろくまのぬいぐるみを 30 個，あざらしのぬいぐるみを 40 個作るときに，利益が 90000 円で最大となることがわかる． ■

13.4　第 13 回の余談

13.1 しろくまのぬいぐるみの個数を 45 個にすると綿の量が 500 g 足りない．しろくまのぬいぐるみの個数を 43 個にすると，あざらしのぬいぐるみをあと 6 個作れるが，このときの利益は 176500 円であり，最大値の 177500 円より 1000 円少ない．

13.2 主問題の拡大係数行列に対応する双対問題の拡大係数行列を書くのは少しコツがいる．次の手順に従うとよいだろう．

1. まず双対問題側の基底変数に対応する制約条件の左辺の列に単位行列を記入する．そして，双対問題の基底解を表すように右辺の値を記入する．
2. 主問題の基底変数の値を双対問題の拡大係数行列の第 1 行の非基底変数の列に順に記入する．基底変数の列には 0 を記入する．
3. 目的関数の右辺の値を -1 倍して記入する．
4. 残りの部分は第 1 行と右辺の値で対応をみながら，元の値を -1 倍した値を記入していく．

例えば例題 13.4 の場合，手順 3 までで

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 40 & 20 & 0 & 0 & -95000 \\ \hline & & 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ & & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

となる．残りは，例えば $(2,1)$ 成分ならば，そのすぐ上を見れば 40，右辺値は $\frac{11}{2}$ となっているので，主問題の拡大係数行列で第 1 行が $\frac{11}{2}$ となっている列の，右辺値が 40 と

なっている行，つまり $(3,3)$ 成分の $-\frac{1}{250}$ を -1 倍した $\frac{1}{250}$ を記入すればよいことがわかる．なお，あらかじめ主問題の拡大係数行列を，基底変数の列を左から順に抜き出せば単位行列になるように行を入れ替えておけば，前回学んだ通りに転置して -1 倍したものを順に入れていくだけになるのでやりやすくなる．

第 14 回　内点法の概要

線形計画問題を解くには多くの場合シンプレックス法で事足りるが，巨大な問題を高速に解くためにシンプレックス法以外の解法も研究され，その中でも内点法とよばれる一連の方法が成功をおさめた．内点法はシンプレックス法と違って反復法とよばれる種類の解法であり，これまでとはちょっと毛色が違う話で馴染みにくいかもしれないが，1 回で簡単に解説してみる．

14.1　シンプレックス法の計算量

≫ **クレー・ミンティの問題**　突然であるが，次の問題を考えよう：

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{条件} & x_1 \leq 5 \\
& 4x_1 + x_2 \leq 25 \\
& 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

これを最大係数規則のシンプレックス法で解くと次のようになる：

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
-4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
\boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\
8 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 125
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1)\text{ をピボット}}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & -2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 20 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
0 & \boxed{1} & 0 & -4 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 4 & 1 & -8 & 0 & 1 & 85
\end{array}\right)
$$

$$\xrightarrow{\substack{(3,2)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -1 & -4 & 2 & 0 & 30 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,4)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 50 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\ -8 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 25 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(4,3)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 75 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\ -8 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 25 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,1)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 1 & 95 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 65 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(3,5)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 105 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -8 & 0 & 1 & 85 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,4)\text{ をピボット}\\ \text{として行基本変形}}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 125 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\ 8 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 125 \end{array}\right)$$

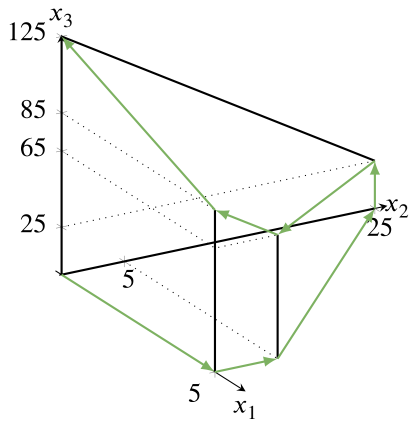


図 14.1　3 次元のクレー・ミンティ問題の実行可能領域．軸によってスケールが異なることに注意．

問題の規模のわりに随分時間がかかったが，結局最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 125)$ で最適値 125 と求まった．何が起きているのかというと，この問題の実行可能領域は図 14.1 のような六面体の内部となっているのだが，その八個の頂点を全て辿ってしまう問題となっているのである．

一般に，D を正の整数として

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad \sum_{j=1}^{D} 2^{D-j} x_j \\
&\text{条件} \quad x_i + \sum_{j=1}^{i-1} 2^{i-j+1} x_j \le 5^i \quad (i = 1, 2, \ldots, D) \\
&\qquad\quad x_1, x_2, \ldots, x_D \ge 0
\end{aligned}
$$

という問題の最適解は $(x_1, x_2, \ldots, x_{D-1}, x_D) = (0, 0, \ldots, 0, 5^D)$，最適値は 5^D となるが，最大係数規則のシンプレックス法で解くと，実行可

能領域の 2^D 個ある頂点を全て辿る羽目になることが，1972 年にアメリカのクレーとミンティによって示された[余談14.1]．したがって，この問題は D が 30 程度でも 10 億回以上のピボット選択が必要になり，D が大きくなるにつれてあっという間に解けなくなってしまう．

このように，問題のサイズ（今の場合は変数の数）が大きくなるにつれて必要な計算の回数が指数関数的に増えるような問題が一つでも存在する場合，大規模問題を現実的な時間で解くことができる保証がないということで，そのアルゴリズムはあまり良くないという烙印を押されてしまう[余談14.2]．専門用語で言うと，**最悪計算量** (worst-case complexity) が指数のオーダーで増えるということになる．しかし，実際にはこのような問題は極めて稀であり，クレーとミンティがやったように人工的に作りでもしない限り生じない現象であった．つまり，シンプレックス法の**平均計算量** (average-case complexity) はそんなに悪くない[余談14.3]．最悪計算量が指数オーダーであることがシンプレックス法の価値を下げるものではないことは何度でも強調しておくべきであると考えるが，他方で「**線形計画問題を多項式オーダーの最悪計算量で解くことができるアルゴリズムは存在しないのか？**」という問題は，研究者の間で長い間興味を持たれる問題となっていた．

≫ **楕円体法**　この問題は 1979 年にソヴィエト連邦のハチヤンによって解決された．ハチヤンはその 3 年前に別のソヴィエト人により提案されていた楕円体法という線形計画法の解法アルゴリズムの最悪計算量が多項式オーダーであることを示したのである．

楕円体法についてはここでは一切解説しないが，大切な事実として，楕円体法は多項式オーダーのアルゴリズムではあるが，**実際に使うとシンプレックス法に全く太刀打ちできなかった**ということがある．最悪計算量の評価では関数の最も増大度の大きい部分のみが重要

で，係数も無視した評価が行われる．よって，（楕円体法のことではないが）例えば問題サイズを n として最悪計算量が $1000000000n^6$ であると言った場合にもれっきとした多項式オーダーなのである．確かに n が十分大きくなれば指数関数よりもはるかに小さくなるが，n が小さいときには全く勝負にならない[余談14.4]．既に述べたようにシンプレックス法の計算量は経験的に十分に小さいということもあって，楕円体法の出現によりシンプレックス法の地位が揺らぐことは全くなかった．

≫ **内点法**　シンプレックス法がずっと使われ続けていたものの，数理計画法の適用範囲がどんどん広がり，問題が複雑化の一途をたどると，解きたい線形計画問題の規模は巨大となり，シンプレックス法ではなかなか計算が終わらないということになった．より高速なアルゴリズムを求める人々の前に突如現れたのが，1984 年のナレンドラ・カーマーカーによるアルゴリズムである．インド人であったカーマーカーは渡米して計算機科学を学び，AT&T というアメリカの電話会社のベル研究所でこのアルゴリズムを開発した[余談14.5]．カーマーカーのアルゴリズムは多項式オーダーであり，しかも大規模問題をシンプレックス法よりも高速に解くことができた．これを契機にしてカーマーカーのアルゴリズムよりさらに高速なアルゴリズムの開発競争が活発に行われ[余談14.6]，1987 年から 1989 年頃にかけて開発された**主双対内点法** (primal-dual interior-point method) が現在では広く用いられている[余談14.7]．

カーマーカーのアルゴリズムやその後多数開発されたアルゴリズムは，いずれもシンプレックス法とは違って実行可能領域の内部を通って最適解に向かうものである．このことから，これらのアルゴリズムを総称して**内点法** (interior-point method) とよぶようになった．図 14.2

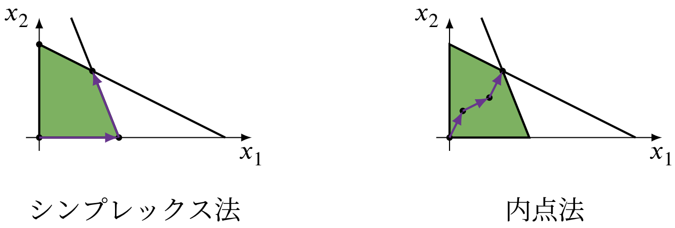


図 14.2　シンプレックス法と内点法の概念図.

が両者の違いを表している．小規模な問題では内点法のような大掛かりなことをするよりシンプレックス法の方が速いのだが，大規模な問題ではシンプレックス法ではどうしても辿る基底解の数が多くなってしまう．内点法の特徴は大規模問題でも辿る実行可能解の数があまり変わらないことであり，この特性によりシンプレックス法よりも高速に問題が解けるのである．

14.2　ニュートン法

≫ **相補性定理を解く**　主双対内点法の発想は，言われてみればとてもシンプルと思えるものである．相補性定理 12.1 において，線形計画問題とその双対問題

$$
\begin{array}{llll}
\text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \qquad & \text{最小化} & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{条件} & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} & \text{条件} & A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

があるとき，これらを標準形に直して

$$
\begin{array}{llll}
\text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} & \text{最大化} & -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \\
\text{条件} & A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b} & \text{条件} & \boldsymbol{t}-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\geq\boldsymbol{0} & & \boldsymbol{t},\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}
\end{array}
$$

と書けば，両者の解がともに最適解であるための必要十分条件は

$$
\begin{aligned}
&A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b},\\
&\boldsymbol{t}-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{c},\\
&x_jt_j=0,\quad j=1,2,\dots,n,\\
&s_iy_i=0,\quad i=1,2,\dots,m,\\
&\boldsymbol{x},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t},\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

が全て満たされることであるということを示した．非負制約を除けば全て等式であるので，これら等式を単に連立方程式とみなして解を求めてしまえばよいのではないだろうか．そのように考えたとき，$A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{t}-A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{c}$ は連立一次方程式だからよいのだが，相補性条件 $x_jt_j=0$ と $s_iy_i=0$ は一次式ではない，つまりこれは非線形な連立方程式であることが問題となる．しかし，数値計算の世界では一般の非線形方程式の解を求めるアルゴリズムとして**ニュートン法** (Newton’s method) が古くから知られているので[余談14.8]，これを適用すればよいのである．線形な問題をわざわざ非線形な問題に帰着して解くというのは奇妙な感じがするが，これがとてもうまくいくことがわかるのだ．

≫ **一変数関数のニュートン法**　一変数関数 $f(x)$ があるとき，方程式 $f(x)=0$ の解を一つ求める問題を考える．仮定として，その近似解

x_0 があり，$f(x)$ は $x = x_0$ で微分可能としよう．このとき，テイラーの定理より，$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数として

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0}$$

と置くと

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$$

が成立する．これの意味するところは，$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ は $x \to x_0$ で一次関数よりも速く 0 に減衰するということである．もしテイラー展開可能であれば，これは $h(x)$ の分子には二次以上の項しか存在しないということでもある．したがって，x が x_0 に十分近ければ

$$f(x) \sim f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

と近似できる．そこで，$f(x) = 0$ の代わりに

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

を解こうというのがニュートン法の基本的な発想である．実際に x について解けば

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

を得る[余談14.9]．この x はあくまでも新しい近似値に過ぎないので x_1 と置くと，$x = x_1$ で同様に考えることで同じ操作を繰り返すことができる．

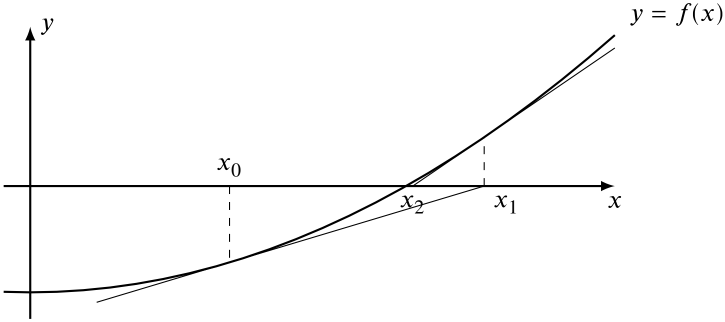


図 14.3　一変数関数のニュートン法の図示.

こうして，漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

を得る．$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ というのは $y = f(x)$ の $x = x_n$ での接線の式にほかならないことに注意すると，これは図 14.3 のように，接線を引いてはその x 軸との交点の値を求めることを繰り返す操作を表していることがわかる．

例えば，$f(x) = x^2 - 2$ の場合を考えよう．このとき，ニュートン法の漸化式は

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

となる．初期値を $x_0 = 1$ として計算してみると表 14.1 のようになる．5 回の反復計算で $\sqrt{2}$ の値が 16 桁求まっていることがわかる余談14.10．求まった桁数を数えると，一回反復するごとに桁数が倍になっていることがわかるが，このことを**二次収束** (quadratic convergence) するという．ニュートン法はこの特性により，近似値が十分に解に近ければ，そこから収束するまでは非常に速いことが知られている．

表 14.1　$x^2 - 2 = 0$ に対するニュートン法の実行結果.

n	x_n
0	1.000000000000000
1	1.500000000000000
2	1.416666666666667
3	1.414215686274510
4	1.414213562374690
5	1.414213562373095
6	1.414213562373095

≫ **多変数関数のニュートン法**　n 変数関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbf{R}^n$ があるときに $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ を求めるニュートン法も一変数の場合と全く同様の考え方で導出することができる．多変数関数に対するテイラーの定理より，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_0$ に十分近いとき

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \sim \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$

と近似できる．ここで，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ は**ヤコビ行列** (Jacobian matrix)[余談14.11]であり，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

であるとき，

$$J(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

で定義される．そこで，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の代わりに

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$$

を $\boldsymbol{x}$ について解くと，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_0)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$$

を得る．これを何度も繰り返す漸化式は

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_n)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$$

である．

例として

$$\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ x + y - 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

を考えよう．このとき，

$$\boldsymbol{J}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，

$$\boldsymbol{J}(x, y)^{-1} = \frac{1}{2(x - y)}\begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -1 & 2x \end{pmatrix}$$

表 14.2　二変数ニュートン法の例の実行結果.

n	x_n	y_n
0	2.000000000000000	-1.000000000000000
1	1.833333333333333	-0.833333333333333
2	1.822916666666667	-0.822916666666667
3	1.822875656167979	-0.822875656167979
4	1.822875655532295	-0.822875655532295
5	1.822875655532295	-0.822875655532295

であり，漸化式は

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2(x_n - y_n)} \begin{pmatrix} 1 & -2y_n \\ -1 & 2x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^2 + y_n^2 - 4 \\ x_n + y_n - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2(x_n - y_n)} \begin{pmatrix} x_n^2 - 2x_n y_n - y_n^2 + 2y_n - 4 \\ x_n^2 + 2x_n y_n - y_n^2 - 2x_n + 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．初期値を $x_0 = 2, y_0 = -1$ として計算してみると表 14.2 のようになる． これも二次収束している．なお，数値計算をする際には，逆行列の計算は無駄が多いので，より高速に計算するために $\boldsymbol{\xi}$ に関する連立一次方程式

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$$

を解くことで $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_n)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$ を計算する．

≫ **相補性定理へのニュートン法の適用**　本題の相補性定理への

ニュートン法の適用を考えよう．つまり

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} - \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{t} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c} \\ X\boldsymbol{t} \\ S\boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0},$$

ただし，

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_1 & & & \\ & s_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_m \end{pmatrix}$$

である．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y})$ のヤコビ行列は

$$J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} A & I_m & O & O \\ O & O & I_n & -A^{\mathrm{T}} \\ T & O & X & O \\ O & Y & O & S \end{pmatrix}$$

である．ただし，

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & & & \\ & y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & y_m \end{pmatrix}$$

である．

前節の三次元クレー・ミンティの問題で考えて，ニュートン法を適用してみよう．書き出してみると

$$
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1 + s_1 - 5 \\ 4x_1 + x_2 + s_2 - 25 \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 + s_3 - 125 \\ t_1 - y_1 - 4y_2 - 8y_3 + 4 \\ t_2 - y_2 - 4y_3 + 2 \\ t_3 - y_3 + 1 \\ x_1 t_1 \\ x_2 t_2 \\ x_3 t_3 \\ s_1 y_1 \\ s_2 y_2 \\ s_3 y_3 \end{pmatrix}
$$

および

$$
J(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_3
\end{pmatrix}
$$

である．初期値としては実行可能解を選ぶことにすると，例えば $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を全て 1 にすれば，$s_1 = 4, s_2 = 20, s_3 = 112, t_1 = 9, t_2 = 3, t_3 = 0$ のときに相補性条件以外の制約条件が全て満たされる．これを初期値としてニュートン法の計算をすると，表 14.3 のようになる． このように 5 回ほどの反復計算で最適解が求まっている．今は三次元なのでそこまでインパクトがないが，もっと高次元のクレー・ミンティ問題でもうまくいくかどうか試してみるとよい．

14.3　主双対内点法

≫ **内点に閉じ込める**　前節ではたまたまうまくいったのだが，単純に相補性定理にニュートン法を適用するだけではだめな場合もある．

表 14.3 三次元クレー・ミンティ問題をニュートン法で解く．スラック変数の値は省略している．

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1	0.61454	0.36954	118.60555	-0.09637	-0.10862	1.00000
2	-0.10825	-0.02437	125.96345	0.01588	0.01609	1.00000
3	-0.00209	-0.00019	125.01749	0.00033	0.00028	1.00000
4	-0.00000	-0.00000	125.00001	0.00000	0.00000	1.00000
5	-0.00000	-0.00000	125.00000	0.00000	0.00000	1.00000

とても簡単な例として，次の問題を考えよう：

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化} \quad x \\
&\text{条件} \quad\ \ x \le 2 \\
&\qquad\qquad\ x \ge 0
\end{aligned}
$$

もちろん最適解は $x = 2$，最適値は 2 である．このとき，ニュートン法を適用すべき関数とそのヤコビ行列は

$$
\boldsymbol{f}(x, s, t, y) = \begin{pmatrix} x + s - 2 \\ t - y + 1 \\ xt \\ sy \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J}(x, s, t, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ t & 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 & s \end{pmatrix},
$$

表 14.4　問題を単純なニュートン法で解く？

	x	s	t	y
0	0.00001	1.99999	0.00001	1.00001
1	0.66667	1.33333	-0.66666	0.33334
2	-0.66669	2.66669	-1.33335	-0.33335
3	-0.13334	2.13334	-1.06667	-0.06667
4	-0.00784	2.00784	-1.00392	-0.00392
5	-0.00003	2.00003	-1.00002	-0.00002
6	-0.00000	2.00000	-1.00000	-0.00000

であり，$\boldsymbol{J}(x, s, t, y)$ の逆行列は

$$\boldsymbol{J}(x, s, t, y)^{-1} = \frac{1}{xy + st}\begin{pmatrix} xy & -xs & s & -x \\ st & xs & -s & x \\ -ty & st & y & t \\ -ty & -xy & y & t \end{pmatrix}$$

である．ヤコビ行列が $xy + st = 0$ のときに可逆でないのだが，$(x, s, t, y) = (0, 2, 0, 1)$ は実行可能解で，ヤコビ行列が可逆にならない．これに非常に近い実行可能解として，$(x, s, t, y) = (0.00001, 1.99999, 0.00001, 1.00001)$ を初期値にとってニュートン法を適用すると，表 14.4 にあるように 6 回の反復で $(x, s, t, y) = (0, 2, -1, 0)$ を得る． これは確かに相補性定理の等式 $\boldsymbol{f}(x, s, t, y) = \mathbf{0}$ を満たしているが，非負制約 $t \geq 0$ に反している．このように，非負制約を考慮せずにただ単にニュートン法を適用すると，得られる解が非負制約を満たさない場合がある．改めて前節の表 14.3 を見直すと，こちらも途中に負の値が現れている．

表 14.5　問題を内点に閉じ込めて解く？ $\tau = 0.99$

	x	s	t	y
0	0.00001	1.99999	0.00001	1.00001
1	0.00002	1.99998	0.00000	1.00000
2	0.00004	1.99996	0.00000	1.00000
3	0.00008	1.99992	0.00000	1.00000
4	0.00016	1.99984	0.00000	1.00000
5	0.00031	1.99969	0.00000	1.00000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

これを防ぐためには，ニュートン法を次のように改良する：パラメータ τ, α_n を導入し，$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - \tau\alpha_n J(\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) > \boldsymbol{0}$ となるように τ, α_n を設定する．つまり,「ニュートン方向」$J(\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$ に進めるのだが，非負制約を破らないようなギリギリのところで踏み留まるようにする．このような α_n は，$\boldsymbol{x}_n$ の各要素を $J(\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)$ の対応する要素で割って，結果が正のものの中から最小のものを選べばよい．τ は 1 だと 0 の要素ができてしまうので，$\tau = 0.99$ などと取る．

ここで用語を導入する．$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{y}$ の全ての変数が正であるような点のことを**内点** (interior-point) といい，特に実行可能な内点のことを**実行可能内点** (feasible interior-point) という．つまり，この方法は移動先を内点に閉じ込めていることになる．

そのように改良して，初期条件は同じで計算した結果が表 14.5 である． 確かに非負制約は破らずに最適解に収束していくのだが，6 桁求めるのに 22 回もかかってしまう（表では長いので省略している）．このようなことが起こる理由は，内点に閉じ込める前の表 14.4 を見

てもらうとよいのだが，t が 0 に近いにも関わらずニュートン方向の t 成分が負になっているので，内点に閉じ込めようとすると動けなくなってしまうのである．この問題に限らず，0 に近い値が要素に存在すると反復回数が大きく増大してしまう可能性がある．

≫ **中心パス追跡法**　この問題を回避するために，**中心パス** (central path) という概念が導入された．これは，変数の値が 0 からなるべく遠い点に一度持っていって，最終的には最適解に至るようなパスを通るように誘導しようという考え方である．その背景には対数障壁関数というものがあるのだが，ここではその説明は省略し，やり方のみ説明する．相補性条件を緩和して，

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} - \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{t} - A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c} \\ X\boldsymbol{t} - \sigma\mu\boldsymbol{e} \\ S\boldsymbol{y} - \sigma\mu\boldsymbol{e} \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t} + \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}}{m + n},$$

とする．ただし，$\boldsymbol{e}$ は全ての要素が 1 の適切なサイズのベクトル，σ は減少率といって，例えば $\sigma = 0.01$ などにする．μ は反復のたびに更新するが定数とみなして，ヤコビ行列の計算には影響しない．μ が 0 になると元の問題に戻り，最適解に収束することが期待できる．

この中心パス追跡法で計算した結果が表 14.6 である．これでうまくいった．

≫ **非実行可能内点法**　これまでやってきたように初期値を実行可能内点にとる方法は理論的にはとても綺麗なのだが，中心パスに近い点をとれないと理論通りにうまくいかない可能性があることが知られている．実は，理論的にはあまり美しくないが，初期値を実行可能でない内点にとってもうまくいくことが知られている．典型的には全

表 14.6　中心パス追跡法で解く．$\tau = 0.99, \sigma = 0.01$

	x	s	t	y
0	0.00001	1.99999	0.00001	1.00001
1	1.98000	0.02000	0.98707	1.98707
2	1.98503	0.01497	0.00987	1.00987
3	1.99956	0.00044	0.00010	1.00010
4	2.00000	0.00000	0.00000	1.00000

表 14.7　非実行可能内点法の計算例．$\tau = 0.99, \sigma = 0.01$

	x	s	t	y
0	3.00000	3.00000	3.00000	3.00000
1	1.21800	0.03000	1.25364	2.44164
2	1.67963	0.03025	0.01254	1.08506
3	1.94699	0.00705	0.00013	1.01161
4	2.00024	0.00007	0.00001	0.99994
5	2.00000	0.00000	0.00000	1.00000

ての変数を同じ正の値にとってしまう方法が有効である．例えば，$(x, s, t, y) = (3, 3, 3, 3)$ を初期値としても，表 14.7 のように収束する．

≫ **さらに勉強するには**　このテキストで述べたことは本当に入口部分に過ぎない．内点法は凸計画問題の解法としても応用されるなどの展開があり，非常によく研究されている．主双対内点法の開発者の一人である水野眞治先生が公開されている次のテキストはとても詳しく，内点法についてもっと知りたい者には参考になるだろう．

`http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text.html`

14.4　第 14 回の余談

14.1 クレー・ミンティの問題はあくまでも最大係数規則を使うと全ての頂点を辿ってしまうという問題である．例えば最初に $(4,3)$ をピボットに選べば 1 回で終了することができる．どのような問題が与えられても多項式オーダーのピボット選択回数で解けるようなシンプレックス法のピボット選択規則が存在するか？ というのは現在でも未解決問題である．

14.2 そもそも解こうとしている問題が本質的に問題サイズの指数オーダーを費やさなければ解けない問題である可能性もある．（正確ではないが）そのような問題が実際に存在するという予想が有名な $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ 予想である．多くの研究者はこの予想が正しいと考えている（が，証明はされていない．証明したと主張する人はたまに現われるが，正しかったことはこれまでない）．指数オーダーの計算時間が必要な問題は，問題規模が少し大きくなるだけでスーパーコンピュータでも終わらないほどの時間がかかるようになってしまう．アルゴリズムの研究者はそれでもより高速なアルゴリズムを構成し限界を追求する研究を続けている．

14.3 なんらかの条件を満たす線形計画問題に限定することで，それらを多項式オーダーの最悪計算量で解けるシンプレックス法の変種を与えたり，シンプレックス法の最悪計算量を評価する研究は現在も進行中である．例えば：

水野眞治，線形計画問題に対する単体法の計算量と強多項式アルゴリズム，数理解析研究所講究録 **1931** (2015) 79–88. `http://hdl.handle.net/2433/223617`

14.4 同様の話として，素数判定問題がある．与えられた整数が素数であるかどうかの判定が多項式時間でできるかという問題は長い間未解決であったが，2002 年にインドの Agrawal, Kayal, Saxena の三名によって発表されたアルゴリズムにより多項式時間で判定できることが明らかになった．三人の頭文字をとって AKS 素数判定法として呼ばれているこのアルゴリズムは，その最悪計算量が入力の整数の桁数を n として $n^{7.5}$ のオーダーと評価されており，多項式とは言っても次数が高すぎて遅いため，まず使われることはない．

14.5 AT&T (American Telephone & Telegraph Company) のベル研究所は世界的に重要な発明を多数行った企業研究所として知られている．特に情報学分野への貢献は著しく，様々な計算機の開発は当然として，情報理論の発表，UNIX と C 言語の開発，C++の開発，無線 LAN の発明など，これらなしでは現在の情報社会は存在しないだろうと思われる．日本でも NTT の研究所は国内有数の企業研究所として著名である．

14.6 内点法の研究が活発に行われたのは，その実用性を目の当たりにしたからというのはもちろんであるが，もう一つ重要な要素として，カーマーカーと AT&T がこのアルゴリズムに特許を出願したということがあった．線形計画法の解法アルゴリズムのような，ほとんど数学的な理論といってよいものを特許で縛ることができるのか，数学は人類の共有財産であるべきだということで，この件は大きな論争を生んだ．結局この特許はアメリカで成立したのであるが，他の研究者達にとっては，特許に抵触しない，より優れた

内点法を生み出す原動力となったのであった．AT&T のこの特許を用いた商売はほとんどうまくいかないまま，現在では特許は切れている．

日本でもこの特許は成立したが，数理計画法の著名な研究者である今野浩が無効審判請求を行うなどの運動を展開した．その頃の話は次の本に詳しい：

今野浩，カーマーカー特許とソフトウェア —数学は特許になるか—，中央公論社，1995 年．

AT&T と言えば，それまで自由に使えた UNIX をライセンス許可なしでは使用禁止とした事件で印象の良くない者もいるだろう．これはカーマーカーのアルゴリズムと同時期の 1983 年のことで，当時独占禁止法違反により AT&T が解体されたことが，向こう見ずなビジネス路線に走り始めた原因であった．解体により電話部門が地域ごとに分割され，ベル研究所が残った新生 AT&T の稼ぎ頭は長距離電話のみとなってしまったため，新たな収入源が必要となったわけである．なお，UNIX のライセンスビジネスの開始により UNIX のそれまでの文化が崩壊しかけたのと同時期には GNU プロジェクト（UNIX とよく似たフリーな OS を開発するプロジェクト．GNU はそのほとんどの部分が開発され，現在広く用いられているが，唯一システムの核となるカーネルと呼ばれるソフトウェア (Hurd) のみが開発停滞し，そこに有名な Linux が現れた．現在 Linux と呼ばれている OS は Linux カーネルに GNU のソフトウェアを組み合わせたものであり，GNU プロジェクトはこれを GNU/Linux と呼ぶべきであると主張している）が誕生し，後のフリーソフトウェアの興隆につながっている．この時期を境にして，栄光の歴史を誇るベル研究所は急速に衰退していくこととなった．

14.7 主双対内点法の発明者として有名なのは東京工業大学の小島政和，水野眞治，吉瀬章子の三名であるが，同時期に統計数理研究所の田辺國士も同様のアルゴリズムを提案したことが知られている．いずれにせよ，主双対内点法は日本人が開発し，それをアメリカの大学教授のベンチャー企業が実装して販売したところ，AT&T のソフトウェアを上回る性能を見せたことから，世界的に広く使われるようになったアルゴリズムである．

名称について，日本語で主双対内点法と言ってもあまりピンと来ないが，英語で primal-dual interior-point method と言うとなんだか必殺技みたいで格好いい．

14.8 ニュートン法はニュートン・ラフソン法ともいう．Isaac Newton (1643–1727) はイギリスの科学者であって，力学や微分積分学の創始者として知らない者はいないだろう．それに比べると，Joseph Raphson (1668–1715) もイギリスの数学者であったようであるが，とても影が薄い．歴史的には，ニュートンが 1669 年にこの方法の原型を与えたが少し複雑なアルゴリズムで，ラフソンが 1690 年にこの方法の改良版として現在知られている簡単なものを与えたということのようで，ラフソンの貢献の方が大きいという意見もあるようだ．

14.9 この式を見て「もしこの結果の x が x_0 に近くなければどうするんだ？」と思われた方は，仮定を注意深く読まれているのだろう．そのようなことは x_0 が $f(x) = 0$ の解から遠いときによく起こるのだが，期待するほどではないにしても少しは解に近づいてくれ

る場合が多い．しかし，ひどい場合はとんでもないところに値が飛んでしまうこともある．ちゃんと考えるには「x が x_0 に十分に近い」という条件を定量化する必要がある．

ニュートン法の収束をなるべく一般的な条件の下で議論するのはあまり簡単ではないのだが，古くから研究されている．よく知られている結果としてはニュートン・カントロビッチの定理というものがある．

14.10 ニュートン法の一回の実行で求まる解は一つだけである．二次関数のもう一つの解が求めたければどうすればよいのかと思われるかもしれないが，二次関数の場合は初期値 x_0 から近い方の解に収束することを示すことができる．しかし，三次以上の場合など，一般の非線形方程式の場合は近い解に収束するとは限らず，初期値から収束先を実行前に知ることは容易ではない．

なお，実数解が一つも存在しない場合，例えば $x^2 + 2 = 0$ の場合などにニュートン法を適用すると，どこにも収束することがなく不規則な挙動を示す．

14.11 ヤコビあんしんヤコビアン。でおなじみの Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) は 19 世紀ドイツの数学者である．英語読みすると「ジャコビ」なのだが，ドイツ語では「ヤコビ」と読む（Johann をヨハンと読むのと同じ．そもそも J は I の変種であり，I から子音の発音ヤユヨを分離したのが J だという歴史があるようである．英語では J の役割は Y の方に移り，本来とは違う発音をするようになってしまった．バベルの塔には困ったもの．）．ヤコビは楕円関数の理論で有名であり，ヤコビ行列の行列式であるヤコビアンの他にはハミルトン・ヤコビ方程式やヤコビの恒等式に名を残す．

“Jacobian” のように人名のうしろに “-ian” をつけるのは「誰々の〇〇」という意味のようで，〇〇はものによって変わる．ヘシアン，ロンスキアン，カソラティアン，パフィアン，ラプラシアン，ガウシアン，ラグランジアン，ハミルトニアン，ポメラニアン，ふくちあんなどがある（……⁉）．

ヤコビ行列を表す記号には $\frac{\partial f}{\partial x}$ といったものもあるが，変数ベクトルとして $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{y}$ が出てくる都合上，用いていない．

第 15 回　発展的な話題：整数計画問題の線形緩和

　整数計画問題をはじめとする組み合わせ最適化問題は，連続性に基づく微分といった概念が使えないために，最悪の場合は全ての実行可能解を調べる羽目になる難しい問題として知られている．しかし，整数計画問題でも目的関数と制約条件がともに線形の場合には，問題の整数制約を外した問題を考えて，その最適解に基づき実行可能領域を分割していくと，探索範囲をうまく狭めることができて，効率的に最適解を求められる場合が多いことが知られている．今回は線形計画法の応用としての整数計画問題の解法を説明する．

15.1　整数計画問題とその緩和問題

　これまで扱った線形計画問題は，変数が実数値をとることができる問題であった．これに対して，制約条件に変数が整数値しかとれないという条件が入っている問題を**整数計画問題** (integer programming problem) という．整数制約がつくだけで問題の難易度はグッと上がる．なぜならば，連続な場合の強力な道具である微分法が使えなくなり，各実行可能解をしらみ潰しに調べていくといった方法を強いられる可能性があるからである．シンプレックス法について基底解の数は次元が高くなると爆発的に増えることを説明したが，整数計画問題についても同様であり，現実的な時間で全探索することはすぐに不可能となる．

　以下では整数計画問題の中でも，目的関数と制約条件がともに線形のものを考える．つまり，線形計画問題に整数制約が追加されたもの

であり，その標準形は

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{条件}\quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0 \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n
\end{aligned}
$$

である．生産計画問題（例題 1.3）などで見たように，変数が何かの個数を表している場合には自然にこの状況となる．応用上重要な組み合わせ最適化問題の多くがこの形で書けることもポイントである．

整数制約がついていたとしても，整数制約を外した連続の線形計画問題をとりあえず解いてみて，最適解として $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n$ を満たすものが得られればこれが元の整数計画問題の最適解であることは明らかであろう．このように，本来の制約条件を外して（緩めて）実行可能領域を拡げたものを**緩和問題** (relaxation problem)，特に緩和問題が線形計画問題になる場合は**線形緩和** (linear relaxation) という．

もし得られた最適解が $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Z}^n$ を満たしていなかったとしても，（最大化問題ならば）緩和問題の最適値は必ず元の問題の最適値以上になる．なぜならば，もしそうでなければ，元の問題の最適解も緩和問題の実行可能解なのだから，緩和問題において得られた最適解よりも目的関数を大きくする解が存在することになるからである．このことは，**緩和問題を解くとその最適値が元の問題の最適値の上界を与える**ことを意味する．

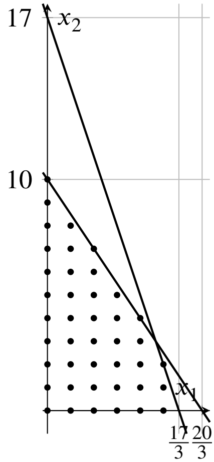


図 15.1　実行可能領域の図示.

15.2　分枝操作

手始めに，次の問題を考えてみよう：

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}\quad & 5x_1 + 2x_2 \\
\text{条件}\quad & 3x_1 + 2x_2 \le 20 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 34 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbf{Z}
\end{aligned}
$$

実行可能領域を図 15.1 に示す．この問題の整数制約を外した線形緩和問題にスラック変数を導入してシンプレックス法で解くと，拡大係

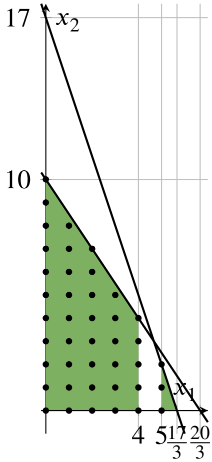


図 15.2　二つの子問題に実行可能領域を分割する．実行可能整数解は変わらないが，線形緩和問題の実行可能領域は小さくなっていることに注意する．

数行列が

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{88}{3} \\ \hline 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right)$$

となるので，緩和問題の最適解は $(x_1, x_2) = (\frac{14}{3}, 3)$，最適値 $\frac{88}{3}$ を得る．x_1 が整数でないので，これは元の問題の最適解ではない．

ここで，元の問題の実行可能領域を二つに分割するという操作を考える．そのために，次の二つの関数を導入する：

- **床関数** (floor function)$\lfloor x \rfloor$：x 以下の最大の整数を返す．
- **天井関数** (ceiling function)$\lceil x \rceil$：x 以上の最小の整数を返す．

この二つの関数を最適解で整数にならなかった $x_1 = \frac{14}{3}$ に適用すると,

$$\left\lfloor \frac{14}{3} \right\rfloor = 4, \quad \left\lceil \frac{14}{3} \right\rceil = 5$$

となる．そこで,

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 34 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbf{Z} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \text{最大化} & 5x_1 + 2x_2 \\ \text{条件} & 3x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & 6x_1 + 2x_2 \leq 34 \\ & x_1 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbf{Z} \end{array}$$

という二つの問題を考えよう．二つの問題の実行可能領域を図 15.2 に示す．合わせれば元の問題の実行可能領域になることから，二つの問題の最適解をそれぞれ求めれば，大きい方が元の問題の最適解・最適値を与えることがわかる．それぞれの問題を元の問題の**子問題** (subproblem) といい，問題を子問題を解くことに帰着する操作を**分枝操作** (branching operation) という．

もう一つのポイントとして，二つの問題の線形緩和問題をそれぞれ考えると，どちらも元の問題の線形緩和問題に不等式制約を一つ追加したものなので，第 13 回で学んだ再最適化によって最適解を容易に求めることができる．そして，元の問題の線形緩和問題の最適解はどちらの問題でも実行可能解でないので，必ず新しい最適解が求まる．

まず，$x_1 \leq 4$ の方は，新たなスラック変数を導入して

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{88}{3} \\ \hline 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{14}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

から再開すればよい．第 3 行からピボットが選ばれていない状態になっているので，もう一度 $(3,1)$ をピボットに選んで行基本変形すると

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{88}{3} \\ \hline 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

となる．これは実行可能基底解を与えないが，第 1 行を見ると双対実行可能であることがわかるので，双対シンプレックス法で解くことができる．$(4,4)$ をピボットに選べば

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 28 \\ \hline 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

となるので，$x_1 \leq 4$ の子問題の線形緩和問題の最適解は $(x_1, x_2) = (4,4)$ で最適値 28 であることがわかる．これは整数解なので，子問題そのものの最適解でもある．

次に $x_1 \geq 5$ の方の子問題を解こう．スラック変数を導入すると

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{88}{3} \\ \hline 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{14}{3} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

となり，同様に $(3,1)$ をピボットに選んでから双対シンプレックス法で解くと，$x_1 \geq 5$ の子問題の線形緩和問題の最適解は $(x_1, x_2) = (5, 2)$ で最適値 29 であることがわかる．これも整数解なので，子問題そのものの最適解でもある．

まとめると，$x_1 \leq 4$ の子問題の最適値が 28，$x_1 \geq 5$ の子問題の最適値が 29 だったので，元の問題の最適解は後者の最適解，つまり $(x_1, x_2) = (5, 2)$ であり，最適値は 29 であることが結論できる．

この問題の場合は二つの子問題の線形緩和問題の最適解がどちらも整数解となったので分枝操作もこれで終了したが，子問題の最適解が整数解にならない場合はさらに分枝操作を行う．このように，子問題にさらに分枝操作を繰り返していくことを**再帰** (recursion) という．次節でさらに詳しく説明する．

15.3　貪欲法と限定操作

≫ **ナップサック問題**　整数計画問題の中でも特に重要な問題として $\{0,1\}$ 整数計画問題がある．これは，各変数を $x_j \in \{0,1\}$ に限定した問題で，要はそれぞれを選ぶか選ばないかを決める問題である．

典型的な $\{0,1\}$ 整数計画問題としてナップサック問題がある．明日は遠足なのだが，「おやつは 300 円まで」と先生に言われた．このとき，それぞれのおやつの価格とあなたの満足度が与えられたとする

と，300 円までという制約を満たしながら満足度を最大化するにはどうすればよいか．ただし，それぞれのおやつは高々一個までで，二個以上持っていくことはないとする．

- ポテトチップス：100 円，満足度 4 点
- じゃがりこ：130 円，満足度 8 点
- チョコレート：70 円，満足度 3 点
- うまい棒：12 円，満足度 1 点
- しろくまアイス：200 円，満足度 10 点

しろくまアイスは食べる頃には溶けている気がするけれども，そんなことは関係ないらしい．整数計画問題として書いてみると，各おやつを持っていくかどうかを順に x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 として

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_4 + 10x_5 \\ \text{条件} & 100x_1 + 130x_2 + 70x_3 + 12x_4 + 200x_5 \leq 300 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\} \end{array}$$

となる．これの線形緩和問題は各 $x_j \in \{0, 1\}$ を $0 \leq x_j \leq 1$ と変更したものである．

ここで，ナップサック問題の線形緩和問題の最適解を求めるための**貪欲法** (greedy algorithm) という方法を説明する．これは要はコストパフォーマンスの良い物から順に選んでいくという方法である．各おやつの価格を満足度で割ると，満足度 1 点あたりの価格が求まるが，順に $\frac{100}{4} = 25$, $\frac{130}{8} = 16.25$, $\frac{70}{3} = 23.333\ldots$, $\frac{12}{1} = 12$, $\frac{200}{10} = 20$ となるので，うまい棒，じゃがりこ，しろくまアイス，チョコレート，ポテトチップスの順に満足度 1 点あたりの価格が安いということになる．そこ

で，うまい棒とじゃがりこを 1 個ずつとすると，合計 142 円であり，次はしろくまアイスを買いたいが，残額 158 円では $\frac{158}{200}$ 個しか買えない．この線形緩和問題の最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 1, 0, 1, \frac{158}{200})$ のとき，最適値（満足度）は 16.9 である．

分枝操作を行おう．つまり，x_5 が 0 か 1 かで分岐し，子問題として

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_4 \\
\text{条件} & 100x_1 + 130x_2 + 70x_3 + 12x_4 \leq 300 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

と

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_4 + 10 \\
\text{条件} & 100x_1 + 130x_2 + 70x_3 + 12x_4 \leq 100 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

を考える．同様にそれぞれの線形緩和問題の最適解を貪欲法で求めると，

- 前者の問題は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{88}{100}, 1, 1, 1)$ で最適値 15.52
- 後者の問題は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \frac{88}{130}, 0, 1)$ で最適値 16.4153 ...

となる．

$x_5 = 1$ の子問題の方がよい最適値が得られたので，こちらの子問題をさらに作ってみよう．つまり，x_2 が 0 か 1 かで分枝し，子問題と

して

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4x_1 + 3x_3 + x_4 + 10 \\ \text{条件} & 100x_1 + 70x_3 + 12x_4 \leq 100 \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

と

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4x_1 + 3x_3 + x_4 + 18 \\ \text{条件} & 100x_1 + 70x_3 + 12x_4 \leq -30 \\ & x_1, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

を考えよう．線形緩和問題の最適解は

- 前者の問題は $(x_1, x_3, x_4) = (\frac{18}{100}, 1, 1)$ で最適値 14.72.
- 後者の問題は実行可能解が存在しない.

これで，後者の問題はこれ以上分枝する意味がないことがわかった.

ここで，$x_5 = 0$ のときの方が最適値が 15.52 で，$(x_2, x_5) = (0, 1)$ のときの最適値 14.72 よりもよかったので，こちらに戻って子問題を作ろう．x_1 が 0 か 1 かで分岐し，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 8x_2 + 3x_3 + x_4 \\ \text{条件} & 130x_2 + 70x_3 + 12x_4 \leq 300 \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

と

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 8x_2 + 3x_3 + x_4 + 4 \\ \text{条件} & 130x_2 + 70x_3 + 12x_4 \leq 200 \\ & x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

を考えよう．線形緩和問題の最適解は

- 前者の問題は $(x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 1)$ で最適値 14
- 後者の問題は $(x_2, x_3, x_4) = (1, \frac{58}{70}, 1)$ で最適値 15.4857 ...

となる．前者は整数解なので元の問題でも最適解であり，これ以上分枝する必要はなく，14 を暫定の最適値とする．後者をさらに x_3 が 0 か 1 かで分枝し，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 8x_2 + x_4 + 4 \\ \text{条件} & 130x_2 + 12x_4 \leq 200 \\ & x_2, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

と

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 8x_2 + x_4 + 7 \\ \text{条件} & 130x_2 + 12x_4 \leq 130 \\ & x_2, x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

を考えよう．線形緩和問題の最適解は

- 前者の問題は $(x_2, x_4) = (1, 1)$ で最適値 13
- 後者の問題は $(x_2, x_4) = (\frac{118}{130}, 1)$ で最適値 15.2615 ...

となる．前者は整数解だがその最適値 13 は暫定の最適値 14 よりも小さいので捨てる．後者をさらに x_2 が 0 か 1 かで分岐し，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & x_4 + 7 \\ \text{条件} & 12x_4 \leq 130 \\ & x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

と

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & x_4 + 15 \\ \text{条件} & 12x_4 \leq 0 \\ & x_4 \in \{0, 1\} \end{array}$$

を考えよう．線形緩和問題の最適解は

- 前者の問題は $x_4 = 1$ で最適値 8
- 後者の問題は $x_4 = 0$ で最適値 15

となる．前者は整数解だがその最適値 8 は暫定の最適値 14 よりも小さいので捨てる．後者も整数解で既に知っている最適値 14 よりも大きいので，新たに 15 を暫定の最適値とする．

これで $x_5 = 0$ のときの分枝が全て終わったので，$(x_2, x_5) = (0, 1)$ の場合に戻ってみると，このときの線形緩和問題の最適値は 14.72 で，暫定の最適値 15 よりも小さいのでさらに分枝する意味はないことがわかる．このように，既に知っている実行可能解の値（暫定の最適値）よりも線形緩和問題の最適値が小さいときにその先の分枝をやめることを**限定操作** (bounding operation) という．分枝操作と限定操作の組み合わせが**分枝限定法** (branch and bound)[余談15.1]である．結論として，

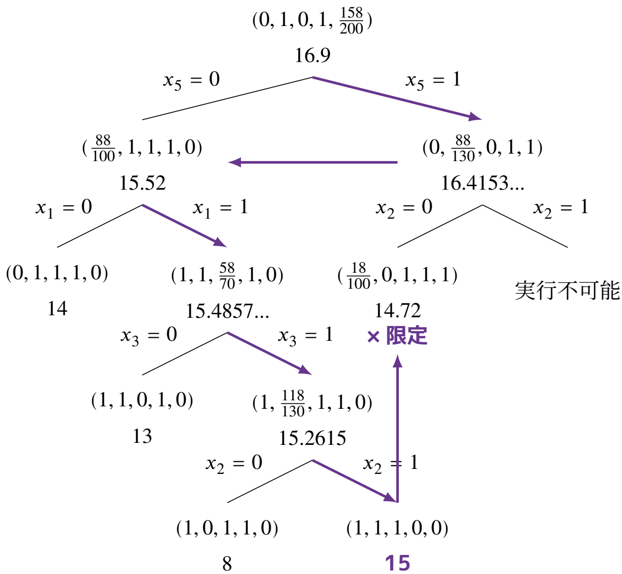


図 15.3　ナップサック問題を最良優先探索の分枝限定法で解く．

最適解は $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 1, 1, 0, 0)$，最適値 15 であることがわかった．

長くなったが，ここまでの計算を図にまとめてみると図 15.3 のような二分木構造となっている．途中，線形緩和問題の得られた最適解が大きいものから順に分枝を進めていったが，これを**最良優先探索** (best-first search) という．最良優先探索は分枝限定法を効率的に進めるうえで有効だが，プログラミングが少し難しく，メモリ容量も多く取りがちであるという問題がある．これに対して，最適値の大小を考慮せず，現在考えている問題をとにかく分枝していく方法を**深さ優先探索** (depth-first search) という．深さ優先探索は再帰を用いて実装できるので簡単でメモリ容量も比較的とらないが，限定操作が効きづらく

時間がかかりがちであるという問題がある．

≫ **さらなる改善に向けて**　図 15.3 を見るとよくわかるが，$\{0,1\}$ 整数計画問題では分枝操作はある変数を 0 にするか 1 にするかの分岐そのものなので，

- 実行不可能になる
- 線形緩和問題の最適解が整数解になる
- 暫定解より線形緩和問題の最適値が小さく，限定操作が行われる

のどれかが起こらないと全ての実行可能解を探索するのと何も変わらなくなる．この事情は $\{0,1\}$ でない整数計画問題でも全く同様である．限定操作がなるべく起こるようにするためには，目的関数の値ができるだけ大きな実行可能解を早めに見つけることが重要になる．今回の説明に用いた「暫定解」以外に，貪欲法をはじめとするなんらかの方法でとにかく実行可能解を求めることができれば，そのときの目的関数の値が最適値の下界となるので，その後得られる子問題の最適値の上界がこの下界を下回れば限定操作をすることができる．また，上界の値をできるだけ小さくするために，分枝操作に加えて**切除平面法** (cutting-plane method)[余談15.2]という，線形緩和問題の制約条件を包含する実行可能整数解を変えない範囲でできるだけ強くするという方法が知られている．分枝限定法と切除平面法を合わせた方法は**分枝カット法** (branch-and-cut) とよばれており，整数計画問題のソルバーにおいて基本的なアルゴリズムとして用いられている．

15.4　第 15 回の余談

15.1　分枝限定法は 1960 年に London School of Economics のランドとドイグによって提案された（二人とも女性である）．

15.2 切除平面法は 1950 年代に当時アメリカ海軍にいたゴモリーによって提案された．切除平面法はこれだけでは計算を進めるのに何度も切除操作をしなければならず，加えて数値的に不安定であったため，提案したゴモリーですら使えない方法とみなしていた．しかし，1990 年代中頃になって，分枝限定法と組み合わせると非常に効率的な方法となること，および数値不安定性を乗り越える方法が提案され，主要な方法の一つとなるに至った．

付録 A　線形代数の補足

第 4 回の補足として，連立一次方程式の理論をより詳細に述べる．線形独立・線形従属と行列の階数，および基底の概念について説明し，これを用いて連立一次方程式の解空間の構造を明らかにする．この付録の内容は本論のレベルに対して難しめなので，必要に応じて他の線形代数の教科書も参照しながら読むとよいだろう．

A.1　線形独立・線形従属と行列の階数

≫ 全ての行からピボットを選べない場合　次の連立一次方程式を考えよう：

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 20, \\ -6x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 12, \\ -2x_1 + 4x_2 + 24x_3 + 2x_4 = 52. \end{cases}$$

拡大係数行列を作って行基本変形すると，

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -2 & 9 & 3 & 20 \\ -6 & 8 & 6 & -4 & 12 \\ -2 & 4 & 24 & 2 & 52 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 10 \\ 0 & \boxed{2} & 33 & 5 & 72 \\ 0 & 2 & 33 & 5 & 72 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 21 & 4 & 46 \\ 0 & 1 & \frac{33}{2} & \frac{5}{2} & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．第 3 行の成分が全て 0 になってしまったので，第 3 行からピ

ボットを選ぶことはできず，これで元の連立一次方程式は

$$\begin{cases} x_1 + 21x_3 + 4x_4 = 46, \\ x_2 + \dfrac{33}{2}x_3 + \dfrac{5}{2}x_4 = 36, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

と同値であることがわかった．3 本目の式は常に成り立つ式なので考慮しなくてもよく，解は x_3, x_4 を任意パラメータとして

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_3 \begin{pmatrix} 21 \\ \frac{33}{2} \end{pmatrix} - x_4 \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 \\ 36 \end{pmatrix}$$

で決まる (x_1, x_2, x_3, x_4) の組である．つまり，$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-21x_3 - 4x_4 + 46, -\frac{33}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 + 36, x_3, x_4)$ である．

第 3 行が全て 0 になったのはピボットの選び方によるのだろうか？別の選び方をしてみると，

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & \boxed{-2} & 9 & 3 & 20 \\ -6 & 8 & 6 & -4 & 12 \\ -2 & 4 & 24 & 2 & 52 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,2)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -10 \\ \boxed{2} & 0 & 42 & 8 & 92 \\ 2 & 0 & 42 & 8 & 92 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & \frac{33}{2} & \frac{5}{2} & 36 \\ 1 & 0 & 21 & 4 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

とやはり 0 になる．それならばと第 3 行からピボットを選んでみると，

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 9 & 3 & 20 \\ -6 & 8 & 6 & -4 & 12 \\ -2 & 4 & 24 & \boxed{2} & 52 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(3,4)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{5} & -8 & -27 & 0 & -58 \\ -10 & 16 & 54 & 0 & 116 \\ -1 & 2 & 12 & 1 & 26 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,1)\text{ をピボット}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{27}{5} & 0 & -\frac{58}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{33}{5} & 1 & \frac{72}{5} \end{array}\right)$$

といった具合で，どう選んでも必ず一行は全て 0 になってしまう．したがって，行基本変形の仕方に依らず，解は二つの任意パラメータを用いて書かれることになる．

ここで実行した三通りの行基本変形をもう少し観察してみよう．拡大係数行列の各行を取り出して，

$$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 9 & 3 & 20 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 6 & -4 & 12 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 24 & 2 & 52 \end{pmatrix}$$

と置こう．このとき，最初の変形は

$$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} - \frac{-2}{2}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} - \frac{2}{2}\left(\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} - \frac{-6}{2}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$$

を意味する．左辺を整理すると

$$-2\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \tag{A.1}$$

という関係式を得る．実際にこの式が正しいことは容易に確かめられる．二つ目と三つめの行基本変形も同様に書いてみると

$$\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} - \frac{4}{-2}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} - \frac{2}{2}\left(\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} - \frac{8}{-2}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} - \frac{-4}{2}\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}} - \frac{-10}{5}\left(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} - \frac{3}{2}\boldsymbol{a}_3^{\mathrm{T}}\right) = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$$

となり，整理すればどちらも (A.1) と同値な式となる．どうやら各行ベクトルを定数倍して足し合わせると $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ になるという関係式が存在するとき，行基本変形するとある行の全ての成分が 0 になるということが起こるようだ．

≫ **線形独立と線形従属**　この状況は重要なので，名前をつけておこう．m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbf{R}^n$ の**線形結合** (linear combination) もしくは**一次結合**とは，ある定数 $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{R}$ を用いて

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

の形で表されるベクトルのことをいう．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ が**線形従属** (linearly dependent) もしくは**一次従属**であるとは，ある「**全てが 0 ではない**」定数 $c_1, c_2, \dots, c_m$ について，その線形結合が $\mathbf{0}$ になることをいう：

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0} \quad \text{for some} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}. \tag{A.2}$$

また，線形結合が $\mathbf{0}$ になるような $c_1, c_2, \dots, c_m$ が全て 0 の場合しかないとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ は**線形独立** (linearly independent) もしくは**一次独立**であるという．もし $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ が線形従属ならば，式 (A.2) において 0 でない c_i が存在するから，

$$\boldsymbol{a}_i = -\frac{c_1}{c_i}\boldsymbol{a}_1 - \cdots - \frac{c_{i-1}}{c_i}\boldsymbol{a}_{i-1} - \frac{c_{i+1}}{c_i}\boldsymbol{a}_{i+1} - \cdots - \frac{c_m}{c_i}\boldsymbol{a}_m$$

と $\boldsymbol{a}_i$ を $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{i-1}, \boldsymbol{a}_{i+1}, \dots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表すことができる．線形独立であるとは，どの $\boldsymbol{a}_i$ も他のベクトルの線形結合では表せないということを意味する．

例題 A.1

次の三本のベクトルが線形独立か線形従属かを判定せよ：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

解答　この三本のベクトルの線形結合が $\mathbf{0}$ になるという式を立てると

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となる．これは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ と同値なので，線形独立である．■

例題 A.2

次の三本のベクトルが線形独立か線形従属かを判定せよ：

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

解答　この三本のベクトルの線形結合が $\mathbf{0}$ になるという式を立てる

と．行列・ベクトル積の列ベクトル表示 (2.9) より

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{A.3}$$

となる．これを連立一次方程式だと思って，掃き出し法で解くと（右辺ベクトル $\mathbf{0}$ は行基本変形で変化しないので，拡大係数行列ではなくただの係数行列を行基本変形する）

$$\begin{pmatrix}\boxed{1}&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,1)\text{ をピボット}}\begin{pmatrix}1&4&7\\0&\boxed{-3}&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,2)\text{ をピボット}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

となるので，解は c_3 を任意パラメータとして

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=-c_3\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

で決まる (c_1,c_2,c_3) の組である．つまり，$(c_1,c_2,c_3)=(c_3,-2c_3,c_3)$ である．これは c_3 を 0 でない値に選べば式 (A.3) を満たす全てが 0 ではない c_1,c_2,c_3 が存在するということなので，線形従属である． ■

» **行列の階数**　まずは線形従属について，次の基本的な定理を示しておこう．

定理 A.1

n 次元ベクトルが m 本あるとき，もし $m > n$ ならばこれらのベクトルは線形従属である．

証明　m 本のベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbf{R}^n$ とすると，行列・ベクトル積の列ベクトル表示 (2.9) より，式 (A.2) は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

と書くことができる．したがって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m$ が線形従属である，線形独立であるとは，これらを並べた行列を係数行列とする連立一次方程式に $\mathbf{0}$ 以外の解が存在する，存在しないこととそれぞれ同値である．

ところで，$m > n$ であるときは行数の方が列数よりも少ないので，解は一つ以上の任意パラメータを決めることで得ることができる．パラメータを一つでも 0 でなくすれば $\mathbf{0}$ でない解が得られるので，線形従属であることがわかる．■

同様の考え方で，次が言える．

定理 A.2

正方行列 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は，もしある行の成分が全て 0 であれば可逆ではない．

証明　連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を考えると，変数が n 個に対して仮定より n 本未満の式しかないので，定理 A.1 と同様の考え方により，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在することがわかる．このとき，任意の $X \in \mathbf{R}^{n\times n}$ に対して $XA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるが，もし A が可逆ならば逆行列が存在して $A^{-1}A\boldsymbol{x} = I_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ とならなければならないので，逆行列は存在できないことがわかる．つまり，A は可逆ではない．■

定理 A.3

基本行列の積には，その成分が全て 0 の行が生じることはない．

証明　基本行列は可逆である（なぜか？）．$F_1, F_2, \dots, F_m \in \mathbf{R}^{n\times n}$ を基本行列とすると，その積 $F_1F_2\dots F_m$ の逆行列は $F_m^{-1}\dots F_2^{-1}F_1^{-1}$ である．実際，

$$
\begin{aligned}
F_m^{-1}\dots F_2^{-1}F_1^{-1}F_1F_2\dots F_{m-1}F_m &= F_m^{-1}\dots F_2^{-1}F_2\dots F_{m-1}F_m \\
&= \dots \\
&= F_m^{-1}F_m \\
&= I_n.
\end{aligned}
$$

こうして，基本行列の積は可逆であることがわかった．もし基本行列の積にその成分が全て 0 の行が生じたとすると，定理 A.2 より可逆でないということになってしまうので，そのようなことは起こらないということがわかる．■

さらに準備として，次を証明しておこう

定理 A.4

m 本のベクトルが線形従属であるとすると，これらから線形結合を m 本作れば，それらはまた線形従属である（線形独立にはなりえない）．

証明　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbf{R}^n$ が線形従属であると仮定すると，

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \mathbf{0}$$

となる，全てが 0 ではない $c_1, c_2, \ldots, c_m$ が存在する．必要ならば下付き添字をつけかえることで $c_m \neq 0$ とすると，

$$\boldsymbol{a}_m = -\frac{c_1}{c_m}\boldsymbol{a}_1 - \frac{c_2}{c_m}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_{m-1}}{c_m}\boldsymbol{a}_{m-1}$$

と書ける．したがって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合を m 本作り，$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ とすると，これらはいずれも $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{m-1}$ の線形結合で書けてしまう．このことは，行列・行列積の定義より，ある $\Gamma \in \mathbf{R}^{(m-1)\times m}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{m-1} \end{pmatrix} \Gamma$$

と書ける．定理 A.1 より Γ の列ベクトルは線形従属であり，したがってある $\mathbf{0}$ でない $\boldsymbol{d} \in \mathbf{R}^m$ で $\Gamma\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$ となるものが存在する．このとき，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \ldots & \boldsymbol{b}_m \end{pmatrix} \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_{m-1} \end{pmatrix} \Gamma\boldsymbol{d} = \mathbf{0}.$$

つまり $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ も線形従属である．■

この定理の対偶をとれば，次を得る．

定理 A.5

m 本のベクトルから線形結合を m 本作ったとき，それら作った m 本が線形独立であれば元の m 本も線形独立である．

以上の準備のもと，目標の定理が証明される．

定理 A.6

$m \times n$ 行列 A を行基本変形して全ての成分が 0 の行が生じないための必要十分条件は，A の m 本の行ベクトルが線形独立であること．

証明　以下では $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbf{R}^n$ を用いて

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

であるとする．行列・行列積の定義 (3.6) より

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,m} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} + c_{1,2}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + c_{1,m}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \\ c_{2,1}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} + c_{2,2}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + c_{2,m}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ c_{m,1}\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} + c_{m,2}\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + c_{m,m}\boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

である．この左辺に左からかけた行列が行基本変形を実現する基本行列の積だと思うと，定理 A.3 より各行について $c_{i,1}, c_{i,2}, \ldots, c_{i,m}$ のどれかは 0 ではない．したがって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立だとすると，行基本変形の結果でどれかの行の成分が全て 0 になることはない．

逆にどのように行基本変形しても全ての成分が 0 の行は生じないと仮定しよう．話を簡単にするため，$(1,1), (2,2), \ldots, (m,m)$ をピボットとして順に行基本変形することで A の各行を

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix}, \\
&\qquad \vdots \\
&\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & * & \ldots & * \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

の形にできたとしよう（$*$ は値を気にしなくてよい成分）．そうできない場合も仮定から必ず全ての行からピボットが選べるので，話は大体同じである．この各行はそれぞれが $\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}}$ の線形結合であるが，これらのさらに $c_1, c_2, \ldots, c_m$ による線形結合を作ると

$$
\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{m-1} & c_m & * & \ldots & * \end{pmatrix}
$$

であって，これが $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ と等しいためには $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ でなければならない．これより，定理 A.5 を使えば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線形独立であることがわかる． ■

≫ **階数**　こうして，係数行列の行ベクトルが線形独立ならば掃き出し法の途中である行が $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ になる心配はなく，線形従属ならば必ずそのような状況が起きるということがわかった．ところで，任意パラメータの数については何か言えるであろうか．この節の冒頭の例では，3 本の式があるのに対して 1 本が消去法で $0 = 0$ になってしまうので，変数の数 4 から $3 - 1 = 2$ を引いて 2 つの任意パラメータで解

が書けた．より極端な例として，例えば

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases} \tag{A.4}$$

を考えれば，明らかに 2 つ目と 3 つ目の式は 1 つ目の式の定数倍であるので，変数の数 4 から $3-2=1$ を引いて 3 つの任意パラメータで解が書けるであろうことがわかる．この 2 つの例から，線形独立な行ベクトルが何本あるかが重要であるということが想像されるであろう．

そこで，次の定義をしておく．$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ の**階数** (rank) とは，A の行から線形独立な行ベクトルとして選べる最大の本数のことであり，$\operatorname{rank} A$ で表す．これまでの議論からわかる通り，階数は行基本変形をするときに相異なる列からピボットを選べる最大の行数（掃き出し法を実行して全ての成分が 0 とならなかった行の数）でもある．他にも同値な定義がたくさんあるが，ここでは詳しくは述べない．

定義より明らかに $\operatorname{rank} A \leq m$ かつ $\operatorname{rank} A \leq n$ が成り立つ．A の m 本の行ベクトルが線形独立であることは $\operatorname{rank} A = m$ と言い換えることができ，業界によってはこのことを行フルランク (full row rank) であるという[余談A.1]．また，行フルランクでないことをランクが落ちている (rank deficient) という．定理 A.1 もしくは $\operatorname{rank} A \leq n$ より，もし $m > n$ であれば行フルランクにはなりえない．

この節で出てきた行列で言えば，

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -2 & 9 & 3 & 20 \\ -6 & 8 & 6 & -4 & 12 \\ -2 & 4 & 24 & 2 & 52 \end{array}\right)$$

の階数は 2 である．また，連立一次方程式 (A.4) に対応する

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

の階数は 1 である．ところで，もしこれの右下の成分をいじって

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

とすると，行基本変形すると第 3 行に $0 = 1$ が出てくるので，解は存在しないことになる．これは行基本変形で係数行列部分は $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ が作れるのに拡大係数行列の対応する行では $\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ にならないのが原因であるので，階数でこの状況を $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)$ と表すことができる．今の例の場合，係数行列の階数は 1 だが拡大係数行列の階数は 2 となっている．

ここまでの内容をちゃんとまとめておくと，次のようになる．

定理 A.7（係数行列の階数と解の関係）

$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^{m}$ を用いて表される連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える．

(1) もし $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) = n$ ならば，方程式はただ一つの解を持つ．

(2) もし $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\left(A \mid \boldsymbol{b}\right) < n$ ならば，方程式は無限個の解を持ち，それらは $n - \operatorname{rank} A$ 個の任意パラメータを用いて書き表される．

(3) もし $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank}\left(A \mid \boldsymbol{b}\right)$ ならば，方程式は解を持たない．

解の具体的な表示については最後の節でより詳細に述べる．

A.2 基底と座標系

≫ **基底** 例題 A.1 で見たように，第 i 成分だけが 1 で他の成分が全て 0 のベクトルを次元の数だけ準備し，その線形結合を作ると係数が成分そのものになるため，その次元の任意のベクトルを作ることができる．一般に $\boldsymbol{e}_i \in \mathbf{R}^n$ を第 i 成分だけが 1，他の成分が全て 0 のベクトルとすると，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の線形結合は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

となる．集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を $\mathbf{R}^n$ の**標準基底** (standard basis) という．

標準基底の n 本のベクトルは明らかに線形独立である．他方，線形独立な n 次元ベクトルを n 本考えると，次の定理を示すことができる．

定理 A.8

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^n$ が線形独立ならば，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ は可逆であり，連立一次方程式 $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ はどんな $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ に対しても対応するただ一つの解 $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$ を持つ．つまり，任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合で表され，その表し方は $\boldsymbol{b}$ ごと

に一通りしかない．

証明　A^{T} の左から基本行列をかけてさらに転置をとることを考えれば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立であるから，定理 A.6 より，ある基本行列 $F_1, F_2, \ldots, F_m \in \mathbf{R}^{n \times n}$ で，$AF_1 F_2 \ldots F_m = I_n$ となるものが存在することがわかる（定理 3.2 と，基本行列の転置も基本行列であることに注意）．つまり A は可逆で $A^{-1} = F_1 F_2 \ldots F_m$．したがって，$\boldsymbol{c} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ とすれば $A\boldsymbol{c} = AA^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ を満たす．逆行列は存在すればただ一つなので，これが所望のただ一つの解である．■

このことを踏まえ，次元と同じ数のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^n$ が線形独立であるとき，集合 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の**基底** (basis) であるということにする．n 次元の基底があれば，任意の n 次元ベクトルはその線形結合でただ一通りに表される．

≫ **基底と座標系**　基底とは座標軸の概念を一般化したものだと考えられる．第 3 回の「行列・行列積の非可換性」のところで述べた話も改めて読むこと．

先に見た通り，標準基底はその名の通り，標準的な**直交座標系** (orthogonal coordinate system) を与える．二次元の場合に，標準基底を $\pi/4$ 回転した

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

を考えれば，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $\mathbf{R}^2$ の基底となり，$\pi/4$ 回転した直交座標系を与える．では，この新しい座標系であるベクトルを表すとどうなるだろうか．ベクトルの元の座標を (x_1, x_2)，新しい座標を (c_1, c_2) とす

れば,

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

の関係があるので,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \end{pmatrix}$$

がわかる．つまり，**ある基底が与える新しい座標系による表示は，元の座標系で表示したベクトルに基底を並べた行列の逆行列を左からかけることで得られる**．これはそのまま，逆行列をかけるとはどういうことか，連立一次方程式を解くとはどういうことか，という問題に対して一つの答えを与えている．座標系を適切に取り替えることが問題解決の糸口だったのである．

連立一次方程式 (4.3) を例としてもう一度考えよう．拡大係数行列を $(1,1)$, $(2,2)$ をピボットとして行基本変形すると

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & \boxed{8} & 9 & 10 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

となるのであった．この結果は，元の係数行列の第 1 列と第 2 列

$$\left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

を基底として選べば，他の各列は

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} = -3\boldsymbol{a}_1 + 4\boldsymbol{a}_2 \quad \text{(A.5)}$$

と表されることを意味している．元の方程式 (4.3) は列形式では

$$x_1\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$$

だったので，試しに式 (A.5) を代入すれば

$$\begin{aligned}&(x_1-x_3-2x_4+3)\boldsymbol{a}_1+(x_2+2x_3+3x_4-4)\boldsymbol{a}_2\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-x_3-2x_4+3\\x_2+2x_3+3x_4-4\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

となり，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\7&8\end{pmatrix}$ は可逆なので，両辺にその逆行列を左からかけて

$$\begin{pmatrix}x_1-x_3-2x_4+3\\x_2+2x_3+3x_4-4\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

を得る．つまり，「四本のベクトルの線形結合で，あるベクトルを作りなさい」という問題がこの連立一次方程式であって，四本のベクトルのうち次元と同じ数である二本を基底に選んで座標軸を取り直すことで問題が解けている．$\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ は基底なのだから，残り三本のベクトルがどうであろうが，その和の -1 倍のベクトルを作り出せて，これが解になるというわけ．ここで選んだ基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\}$ は直交していないが，座標系としては全く問題なく機能し，**斜交座標系** (oblique coordinate system) という．基底のベクトルの長さは 1 とは限らず，長さを変えれば対応する座標軸のスケールが変わることになる．

なお，この枠組みで扱えるのは直交座標系と斜交座標系のみであり，例えば極座標系のような曲がった（線形ではない）座標軸との間

の変換を取り扱うことはできない．一般の座標系を扱うには，複数の直交座標系の間の（非線形な）写像を考える必要がある．おそらく微分積分学で重積分を学ぶとそういった話は出てくるだろうし，より進んだ取り扱いは微分幾何学（多様体論）で学ぶ．

A.3　ベクトル部分空間とアフィン部分空間

≫ **同次系の解空間**　$A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ として，右辺が $\mathbf{0}$ の連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は**同次系**または**斉次系** (homogeneous system) であるという．同次というのは，零次の項（定数項）がなくて一次の項だけからなるという意味である[余談A.2]．同次系においては必ず $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}\left(A \mid \mathbf{0}\right)$ なので，定理 A.7 より必ず解が存在する．もし $\operatorname{rank} A = n$ ならば，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ はただ一つの解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を持つことがわかる．$\operatorname{rank} A < n$ ならば，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解は任意パラメータ $n - \operatorname{rank} A$ 個を決定すれば一つ定まるが，このときも $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が解であることには変わりない．

ここまで解を表すのに任意パラメータと残りの変数の関係式を与えたところで満足していたが，改めてちゃんと解の集合を書いてみることにしよう．いきなり一般論を書くと少し煩雑になるので，先に具体例を見てみよう．

例題 A.3

連立一次方程式 (4.3) の右辺を 0 にした方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

の解全体の集合を，x_1 と x_3 を任意パラメータとして表せ．

解答　係数行列を行基本変形すると

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(1,2)\text{ をピボット}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & 0 & -\frac{5}{3} & \boxed{-\frac{10}{3}} \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{として行基本変形}]{(2,4)\text{ をピボット}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，解は x_1, x_3 を任意パラメータとして

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = -x_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

で決まる (x_1, x_2, x_3, x_4) の組である．つまり，$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3, x_3, \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3)$ が解である．$\mathbf{R}^4$ の部分集合として，この解全体の集合は

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbf{R} \right\} \tag{A.6}$$

と表される．■

このように，同次系 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解全体の集合は $n - \operatorname{rank} A$ 個の線形独立な n 次元ベクトルの線形結合で表されるベクトル全体となる．

一般に，$m \le n$ として，線形独立な m 本の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbf{R}^n$ をとって，その線形結合の全体

$$V = \{\, c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m : c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}\,\}$$

を考えよう．このとき，任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ の線形結合はまた V の元になる：

$$\gamma_1\boldsymbol{v}_1 + \gamma_2\boldsymbol{v}_2 \in V \quad \text{for any } \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{R}. \tag{A.7}$$

証明は簡単なので，考えてみよ．実はこの V の性質が「線形」なものたちが持つ著しい性質の根源であり，非常に重要である．V を $\mathbf{R}^n$ の**ベクトル部分空間** (vector subspace) または**線形部分空間** (linear subspace) であるといい，$\{\,\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\,\}$ を V の**基底**，基底ベクトルの個数 m を V の**次元**という．V の次元のことを $\dim V$ とも表す．

例えば，先ほどの解全体の集合 (A.6) は $\mathbf{R}^4$ のベクトル部分空間であり，その基底は

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\},$$

次元は 2 である．このように，同次系の解全体の集合はベクトル部分空間となるので，**解空間** (solution space) とよぶ．同次系 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間を記号で $\ker A$ と表し，A の**核** (kernel) という．ベクトル部分空間の性質 (A.7) より，同次系では二つの解 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ があれば，その線形結合もまた解になることがわかる（直接にも $A(\gamma_1\boldsymbol{x}_1 + \gamma_2\boldsymbol{x}_2) = \gamma_1 A\boldsymbol{x}_1 + \gamma_2 A\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$ と簡単に確認できる）．

以下は同次系 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の基底についての一般論である．話を簡単にするため，$\operatorname{rank} A = m \leq n$ であると仮定する．（$\operatorname{rank} A < m$ のときは，$\operatorname{rank} A$ の数だけ線形独立な行ベクトルを選び出し，それらの行だけを残した行列で改めて考えればよい．）$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m$ を用いて $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ と表されるとする．$j_1, j_2, \ldots, j_m$ を相異なる 1 以上 n 以下の整数で $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{j_1} & \boldsymbol{a}_{j_2} & \ldots & \boldsymbol{a}_{j_m} \end{pmatrix}$ が可逆となるものに選び，$k_1, k_2, \ldots, k_{n-m}$ を $1, 2, \ldots, n$ から $j_1, j_2, \ldots, j_m$ を除いて得られる整数列とする．このとき，定理 4.2 より，解は $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{n-m}}$ を任意パラメータとして

$$\begin{pmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{pmatrix} = -x_{k_1} P^{-1} \boldsymbol{a}_{k_1} - x_{k_2} P^{-1} \boldsymbol{a}_{k_2} - \cdots - x_{k_{n-m}} P^{-1} \boldsymbol{a}_{k_{n-m}}$$

で $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}$ を決めることで与えられる．ここで，**行列単位** (matrix unit) $E_{i,j}$ を (i, j) 成分のみが 1 で他の成分は全て 0 の行列とする．$n \times m$ の行列単位 $E_{i,j}$ を m 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ にかければ，第 i 成分が $\boldsymbol{a}$ の第 j 成分で他の成分は全て 0 の n 次元ベクトルが得られる．これを用いれば，$E = E_{j_1,1} + E_{j_2,2} + \cdots + E_{j_m,m}$ と置き，$\{ \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \}$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底として

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{k_1}(\boldsymbol{e}_{k_1} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_1}) + x_{k_2}(\boldsymbol{e}_{k_2} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_2}) + \cdots + x_{k_{n-m}}(\boldsymbol{e}_{k_{n-m}} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_{n-m}}) \tag{A.8}$$

がわかる．つまり，同次系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間は

$$\left\{ \boldsymbol{e}_{k_1} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_{n-m}} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_{n-m}} \right\}$$

を基底とする $\mathbf{R}^n$ の $n - m$ 次元ベクトル部分空間となる．この基底の形を考察すると，$AE_{i,j} \in \mathbf{R}^{m\times m}$ は第 j 列が $\boldsymbol{a}_i$ で他の列が全て $\boldsymbol{0}$ である行列となるので，実は $AE = P$であり，$AEP^{-1}\boldsymbol{a}_j = PP^{-1}\boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j$ となる．そして $A\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_j$ なので，$A(\boldsymbol{e}_j - EP^{-1}\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0}$ が成り立つという仕組みになっている．

≫ **非同次系の解空間**　同次系の場合と同様に考えれば，非同次系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の場合は，解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{k_1}(\boldsymbol{e}_{k_1} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_1}) + x_{k_2}(\boldsymbol{e}_{k_2} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_2}) \\ + \cdots + x_{k_{n-m}}(\boldsymbol{e}_{k_{n-m}} - EP^{-1}\boldsymbol{a}_{k_{n-m}}) + EP^{-1}\boldsymbol{b}$$

と書けることがわかる．これは同次系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間のベクトル (A.8) に $EP^{-1}\boldsymbol{b}$ が加わったベクトルという形をしている．ここで，$AE = P$だったので，$AEP^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$，つまり $EP^{-1}\boldsymbol{b}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の一つである．つまり，非同次系の解空間は，非同次系の解を一つ求めれば，これに同次系の解を加えることで表現できる．

一般に，$\mathbf{R}^n$ のベクトル部分空間 Vがあるとき，あるベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ を用いて

$$V + \boldsymbol{b} = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b} : \boldsymbol{v} \in V\}$$

で定義される集合 $V + \boldsymbol{b}$ を**アフィン部分空間** (affine subspace) という．アフィン部分空間はベクトル部分空間と違って線形性 (A.7) は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

でない限り満たさない[余談A.3]．ベクトル部分空間が原点を通る直線や（超）平面を表すのに対して，アフィン部分空間は原点を通るとは限らない直線や（超）平面を表している．

この概念を用いると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解空間は，同次系の解空間（核）$\ker A$ と非同次系の解の一つ $\tilde{\boldsymbol{x}}$ を用いて定義されるアフィン部分空間 $\ker A + \tilde{\boldsymbol{x}}$ であると言い表すことができる．$\ker A$ の元を**基本解** (fundamental solution)，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ を**特殊解** (particular solution) という．

この節の内容は簡単なことを難しく述べているだけだと思われたかもしれないが，線形微分方程式に対しても類似の議論をすることができるため，その雛形として知っておく価値がある．線形で同次の場合は基本解の線形結合（重ね合わせ）もまた基本解であるという性質は重要で，このことがベクトル部分空間という概念で捉えられるということを頭に入れておいてほしい．ここからさらに，行列を線形作用素，ベクトルを関数へと一般化することで「無限次元の線形代数」である関数解析学が展開され，微分方程式論や数値解析では欠かすことのできない一大理論となっている．

A.4　付録 A の余談

A.1　わざわざ「行」フルランクと言っているのは，列の方も考えられるため．実は行列の線形独立な行ベクトルの最大本数と線形独立な列ベクトルの最大本数は一致することが示され，どちらを階数の定義としてもよいことがわかる．関連して定理 A.8 も参照．

A.2　0 は零次の項ではないのかと思われるだろうが，$0x$ を一次の項とは言わないのだから，$0x^0$ も零次の項と呼ぶべきではないだろう．この考察から，0 の次数は未定義とするのが一つの考え方．一方，多項式同士の演算をするプログラムを書く際には，0 を $-\infty$ 次としておくと次数を勘定するときに例外処理を書く必要がなくなることから，$-\infty$ 次と定義するのが合理的であるという主張もあるようだ．どういうことかわからなければ，そういうプログラムを書くことを試みるとよい（多項式は例えばリストを用いて表現することができる．多項式の足し算，引き算，かけ算を定義して，さらに多項式の次数を返す関数を実装してみよ）．

A.3 線形性の代わりに，$c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbf{R}$ を $c_1 + c_2 + \cdots + c_m = 1$ を満たす定数とすれば，任意の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_m \in V + \boldsymbol{b}$ に対して

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m \in V + \boldsymbol{b}$$

が成り立つ．これは線形結合の特殊な場合であって，**アフィン結合**という．アフィン結合を手掛かりにすると，ベクトル空間と類似した理論をアフィン空間に対しても展開することができる．このアフィン結合について閉じているという性質が $\boldsymbol{b}$ の選択に依らない，つまりベクトル空間では必ず原点が存在しなければならないがアフィン空間では原点に相当する点として任意に $\boldsymbol{b}$ を選んでもアフィン結合について閉じているという意味で，原点を忘れたベクトル空間であるというように言われることがある．このことに対応して，ベクトル空間上の変換である線形変換は原点を動かさないのに対し，アフィン空間上の変換（アフィン変換）は線形変換に加えて平行移動も許すものとなっている．

付録 B　線形計画法の基本定理の証明

付録 A の結果を用いて，第 6 回で省いていた線形計画法の基本定理の証明を述べる．

線形計画法の基本定理 6.1 を再掲する．

> (1) 実行可能解が存在すれば，実行可能基底解が存在する．
> (2) 最適解が存在すれば，最適解かつ基底解であるものが存在する．

以下では，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m\times n}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$ として，標準形の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\
\text{条件} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

を考える．以下の証明では，もし基底解でない実行可能解や最適解が与えられたとしても，0 でない成分の数を減らした新たな実行可能解や最適解を得る手続きがあることを示す．

≫ **(1) の証明**　式 (2.9) より，等式制約 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

と書ける．仮定より実行可能解が存在するので，そのうちの一つ $\boldsymbol{x}$ をとってきて，その $\boldsymbol{x}$ の成分が正であるものの添字を $j_1, j_2, \dots, j_l$ とする．非負制約より残りの成分は全て 0 なので，

$$x_{j_1}\boldsymbol{a}_{j_1} + x_{j_2}\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_{j_l}\boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{b} \tag{B.1}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}_{j_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_l}$ が線形独立か線形従属かによって場合分けする．

もし $\boldsymbol{a}_{j_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_l}$ が線形独立ならば，定理 A.1 より $l \leq m$ である．$l = m$ ならば $\boldsymbol{x}$ は実行可能基底解である．$l < m$ の場合も値が 0 の成分を $m - l$ 個基底変数に追加すれば，$\boldsymbol{x}$ は退化した実行可能基底解であることがわかる．

もし $\boldsymbol{a}_{j_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_l}$ が線形従属ならば，線形従属の定義よりある $\begin{pmatrix} \xi_{j_1} & \xi_{j_2} & \cdots & \xi_{j_l} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$ で

$$\xi_{j_1}\boldsymbol{a}_{j_1} + \xi_{j_2}\boldsymbol{a}_{j_2} + \cdots + \xi_{j_l}\boldsymbol{a}_{j_l} = \boldsymbol{0} \tag{B.2}$$

となる．ここで，

$$\epsilon = \min_{k \in \{1,2,\ldots,l\}: \xi_{j_k} > 0} \frac{x_{j_k}}{\xi_{j_k}}$$

と置いて，式 (B.1) から式 (B.2) の ϵ 倍を引けば

$$(x_{j_1} - \epsilon\xi_{j_1})\boldsymbol{a}_{j_1} + (x_{j_2} - \epsilon\xi_{j_2})\boldsymbol{a}_{j_2} + \cdots + (x_{j_l} - \epsilon\xi_{j_l})\boldsymbol{a}_{j_l} = \boldsymbol{b}$$

であり，かつ $x_{j_i} - \epsilon\xi_{j_i} \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, l)$ となるから，これは新たな実行可能解を与え，そのうち 0 でない成分は $l - 1$ 個以下になる．0 になった成分を取り除いて，残った成分に対応する A の列ベクトルが線形独立になれば，先に述べた通りこれが実行可能基底解となる．もしまだ線形従属だとしても，同じことを繰り返せばどんどん 0 成分の数を増やしていくことができ，いずれは線形独立になって実行可能基底解が得られる．

≫ **(2) の証明**　(1) と同様に，最適解を一つとってきて，0 でない成分に対応する A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_{j_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_l}$ が線形独立ならば基底

解である．$\boldsymbol{a}_{j_1}, \boldsymbol{a}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{j_l}$ が線形従属であるとき，(1) と同様にして，その第 $j_1, j_2, \ldots, j_l$ 成分がそれぞれ $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, \ldots, \xi_{j_l}$ であり他の成分は 0 である $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^n$ と $\epsilon > 0$ をとれば，$\boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{\xi}$ は実行可能解で，その 0 でない成分の数が $l-1$ 個以下になる．ここで，δ を適当な実数として $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \delta\epsilon\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \delta\epsilon\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}$ を考えると，δ の絶対値が十分に小さければ非負制約を破らないので，$\boldsymbol{x} - \delta\epsilon\boldsymbol{\xi}$ は実行可能解である．さらに $\boldsymbol{x}$ が最適解であることから $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \delta\epsilon\boldsymbol{\xi}) \leq \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ でなければならず，これより $\delta\epsilon\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} \geq 0$ を得る．この不等式は δ が正でも負でも成り立たなければならないので，結局 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 0$ であることがわかる．したがって，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，つまり $\boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{\xi}$ は最適解である．これを繰り返せば，いずれは最適解かつ基底解であるものが得られる．■

参考図書

≫ **線形代数の本**　この授業で線形代数に興味を持った者は，本格的な線形代数の教科書を読むとよい．和書で古くから定評があるベストセラーは次の二冊である．

- 佐武一郎，線型代数学，裳華房，1958.
- 齋藤正彦，線型代数入門，東京大学出版会，1966.

これらは本格的な数学書であるので（昔の「入門」書は現代数学への本格的な入門である），より親しみやすい本がよければ次の本が丁寧でお薦めできる．

- 長谷川浩司，線型代数，日本評論社，2004.

現代的な教科書としては，最近次が出版された．

- 藤岡敦，手を動かしてまなぶ線形代数，裳華房，2015.
- 藤岡敦，手を動かしてまなぶ続・線形代数，裳華房，2021.

この二冊は穴埋めワークブックなどではなく，行間を埋めるために手を動かすという意味のしっかりした教科書であり，十分な内容を扱っている．ちゃんと勉強したい学生には薦められる．

より応用寄りの最近の教科書としては

- 室田一雄，杉原正顯，東京大学工学教程 基礎系 数学 線形代数 I，丸善出版，2015.
- 室田一雄，杉原正顯，東京大学工学教程 基礎系 数学 線形代数 II，丸善出版，2013.

がある．I が基本的な教科書で，II は各論的な内容である．「理工系の

ための」などと冠する本は記述がやさしく丁寧に，一方で分量のわりに内容は薄くなっていることが多いのだが，この二冊はむしろ通常の線形代数の教科書よりも詳しく，工学で現れる具体例をふんだんに取り入れている．一般論ばかりでは続かないという者には良いかもしれないが，これはこれで読むにはそれなりに根気が必要と思われる．

他にも線形代数の教科書は山のようにあるが，一部の硬派な本を除いて，そのほとんどは似たり寄ったりという印象である．こんなにたくさんの線形代数の教科書があるのは，どの大学でも理工系では線形代数の授業があり，学生のレベルや目的，担当教員のこだわりに応じて各々が微妙に異なる要求を持っており，しかしどの本が要求に合うかを調査するのはこれだけたくさんの本があると大変なので（もしくは合うものが存在せず），それならば教員が自分で書いてしまおうということだろう（このテキストを書いた動機も大体同じである）．出版社としても大学で教科書採用してくれればある程度の販売部数が確保できるので，商品化しやすい．

数学を通して英語を勉強したければ，無料で公開されている線形代数のテキストの PDF を読む手がある．すぐに見つかるのは次で，とても本格的なテキストである．

- J. Hefferon, *Linear algebra*,
  `https://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/`

他にも，今の時代は英語，日本語で公開されている講義ノートが色々あるので，探してみるとよい．

≫ **線形計画法の本**　線形計画法だけを扱った入門書はあまりない．「最適化入門」などというタイトルとして，線形計画法を含み，他に非線形計画法や離散最適化も扱っている場合が多い．そのような本と

して以下がある．

- 梅谷俊治，しっかり学ぶ数理最適化　モデルからアルゴリズムまで，講談社，2020.
- 福島雅夫，新版　数理計画入門，朝倉書店，2011.
- 矢部博，工学基礎　最適化とその応用，数理工学社，2006.

線形計画法だけを扱った本格的な和書は，絶版になっているものは多数あるのだが，現在入手しやすいのは次の本ぐらいだろう．最適化の入門書ではあまり深く扱われていない内点法や線形相補性問題についても詳しく書かれている．

- 並木誠，線形計画法，朝倉書店，2008.

理論を扱うものではなく少し毛色が変わるが，線形計画法がこれまでたどってきた歴史については次の本が大変面白い．

- 今野浩，ヒラノ教授の線形計画法物語，岩波書店，2014.

かつて日本オペレーションズリサーチ学会の会長も務められた今野浩先生（2022 年 2 月逝去）が，1960 年頃の東京大学工学部で「理論は単純だが計算は恐ろしく厄介」な線形計画法に出会ってから，「理論的には単純なはずの線形計画法について，こんなにたくさん書くことがあるのか」というほど分厚いダンツィーグの本（*Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963; `https://doi.org/10.7249/R366` で PDF が無料公開されている）に圧倒されたこと，アメリカに留学してダンツィーグのもとで研究したこと，なぜ巨大な線形計画問題を解かなければならなかったのか，その後の内点法の開発競争など，「汲めども尽きない泉のような」線形計

画法を学ぶ動機付けとなる話がとても親しみやすい文体で綴られている．晩年に書かれた次の記事はこれらの概略版といったところである．

- 今野浩，線形計画法の歴史，オペレーションズ・リサーチ **64** (2019) 204–208, https://orsj.org/wp-content/corsj/or64-4/or64_4_204.pdf

線形計画法からは外れるが，今は新潮文庫にも入っている「工学部ヒラノ教授」から始まる「ヒラノ教授」シリーズは，大学業界あるあるを多く扱ったエッセイ集で，大学とは本当はどんなところなのか興味のある者が読むと多くのことが得られるだろう（小学校，中学校，高校も同じだが，教員の仕事は児童・生徒・学生と接する部分だけではなく，むしろそれ以外の部分がかなり多い）．